
Feuille d'exercices d'algèbre n° 7
Géométrie du plan

Droites dans le plan. Systèmes des équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 1. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur directeur, puis les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(1, 1)$ et de vecteur normal $(2, -3)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 3 \right\}$.
3. $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $x - 4y = 8$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite d'équation $y = 3x + 5$.
5. $\mathcal{D}_5$ la droite passant par $(-1, 2)$ et $(3, 1)$.
6. $\mathcal{D}_6$ la médiatrice du segment reliant $(0, 2)$ et $(-1, 1)$.
7. $\mathcal{D}_7 = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \langle \overrightarrow{OM}, u \rangle = 3 \right\}$ où O est l'origine $(0, 0)$ et u le vecteur $(1, 1)$.

Exercice 2. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur normal, puis en donner une équation.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3, 7)$ et de vecteur directeur $(1, -1)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \{ (1, 4) + t(1, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
3. $\mathcal{D}_3 = \{ (2 + 3t, 4t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1, 1)$ et $(0, 1)$.
5. $\mathcal{D}_5$ la médiatrice du segment reliant $(1, 2)$ et $(-1, 0)$.

Exercice 3. Résoudre en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les systèmes qui suivent.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y &=& 5 \\ y &=& 2 \end{array} \right.$. 2. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y &=& 1 \\ 3x + 3y &=& 2 \end{array} \right.$. 3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y &=& 5 \\ 2x + y &=& 2 \end{array} \right.$. 4. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y &=& 5 \\ 8x + 8y &=& 20 \end{array} \right.$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan non parallèles.
Montrer qu'elles s'intersectent en un seul point.

Bases de $\mathbb{R}^2$

Exercice 5. Déterminer si les ensembles qui suivent forment des bases du plan. Lorsque ce ne sont pas des bases, écrire explicitement leur colinéarité. Lorsque ce sont des bases, calculer l'aire du parallélogramme correspondant.
a.$((0, 0), (0, 0))$; **b.**$((0, 1), (1, 1))$; **c.**$((2, 4), (1, 2))$; **d.**$((0, 0), (1, 0))$; **e.**$((1, 1), (1, 0), (0, -1))$.

Exercice 6. Soient $B = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $B' = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que B' définie la même orientation que B ?
3. Calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque $V = xe_1 + ye_2$ dans la base B'.
4. Quelle est la matrice de passage de B à la nouvelle base B' ? Et de B' à B ?

Exercice 7. Soit $((a, c), (b, d)) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

1. À quelle condition $((a, c), (b, d))$ est-elle une base ? On suppose désormais cette condition remplie.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre en $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ le système $\lambda\,(a, c) + \mu\,(b, d) = (x, y)$.
3. Écrire la base canonique du plan dans la base $((a, c), (b, d))$.

Exercice 8. Propriétés du déterminant. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On rappelle que $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x_1y_2 - y_1x_2$. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{s}$ de $\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer :
a. $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; *b.* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$;
c. $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
d. $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{s}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$; *e.* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{u}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Applications linéaires du plan. Le noyau

Exercice 9. Étudier si les applications suivantes sont linéaires ou pas. Lorsque c'est le cas, calculer le noyau $\ker f$ (le noyau est un sous-ensemble défini de façon suivante : $\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ f(x, y) = 0\}$.)
1) $f(x, y) = (y - 3, x + y)$, 2) $f(x, y) = (2x - (\sqrt{2})y, \dfrac{y}{3})$, 3) $f(x, y) = (0, x^2 + y^2)$.

Exercice 10. Noyau et injectivité. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. On rappelle que le noyau de f est l'ensemble $\ker(f) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2,\ f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}\}$.

1. Montrer que pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \ker(f)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \ker(f)$ et $\lambda\overrightarrow{u} \in \ker(f)$.
2. Montrer que $\overrightarrow{0} \in \ker(f)$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exercice 11. Surjectivité. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire injective et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que f est surjective.

Matrices des applications linéaires

Exercice 12. Trouver toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que $f(1, 1) = (1, 2)$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (2x - y, 3x + 2y)$. Donner la matrice de f dans la base canonique. Calculer f^{-1}.

Exercice 14. Déterminez les matrices des applications linéaires suivantes :
$h_1(x, y) = (2x - y, x)$, $h_2(x, y) = (x - y, 0)$, $h_3(x, y) = (x - y, y - x)$

Exercice 15. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $h(2,1) = (2,-3)$ et $h(1,-1) = (3,-1)$. Déterminez la matrice de h.

Exercice 16. Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{u} \neq 0$, $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$.
2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{u} \neq 0$, $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{id}$. On suppose qu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ tel que $f(\overrightarrow{u})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

1. Montrer que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.
2. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. Posons $f(\overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ et notons A la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Écrire la matrice A et calculer A^3. En déduire $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.
3. Montrer que $f = \mathrm{id}$.

Exercice 18. Pour chaque application linéaires $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivante donner sa matrice dans la base canonique.

1. Symétrie d'axe *a)* Ox; *b)* Oy; *c)* $y = x$; *d)* $y = -x$.
2. Projection orthogonale sur *a)* Ox; *b)* Oy.
3. Homothétie de centre O et de rapport 2.
4. Rotation de centre O et d'angle *a)* $-90°$; *b)* $+180°$; *c)* $+60°$;
5. Cisaillement : $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$.

Exercice 19. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient f et h deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont données respectivement par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Donner les images par f et h d'un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base canonique.
2. Donner la matrice de h^{-1} dans la base canonique. Identifier la transformation h^{-1}.
3. Donner la matrice de l'application $r = f \circ h^{-1}$ dans la base canonique. Calculer $r(\overrightarrow{i}), r(\overrightarrow{j})$ et identifier la transformation r.
4. En déduire la nature de la transformation f.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit la *trace* de A comme étant le nombre $\mathrm{tr}A = a + d$.

1. Calculer la matrice $A^2 - (\mathrm{tr}A)A + (\det A)I$.
2. Si la matrice A est inversible, montrer que la matrice A^{-1} est une combinaison linéaire de I et A.

Exercice 21. Pour tout nombre réel on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la nature de l'application $R(\theta)$?
2. Montrer que l'on a $(R(\theta))^n = R(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient a, b des nombres réels. On suppose $b \neq 0$ et on considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il existe un unique nombre $\lambda > 0$ et un unique $\theta \in]0, 2\pi[$ tels que $A = \lambda R(\theta)$.
4. Calculer $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Projections et symétries de $\mathbb{R}^2$
Soit D_1 et D_2 deux droites secantes dans $\mathbb{R}^2$.

1. *On appelle projection sur D_1 parallèlement à D_2 l'application qui à $u \in \mathbb{R}^2$ associe l'unique élément v de D_1 tel que $u - v \in D_2$.*
2. *On appelle symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 l'application qui à $u \in \mathbb{R}^2$ associe $v - w$, où (v, w) est le couple unique de vecteurs tels que $v \in D_1$, $w \in D_2$ et $u = v + w$.*

Exercice 22.
Soit D_1 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + y = 0$ et soit D_2 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $3x + y = 0$. Notons s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

1. Quelle est la matrice de s dans la base canonique ?
2. Montrer que s est une application bijective.
3. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x - y = 0$. Trouver une équation de $s(D)$.

Exercice 23.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$ est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 où E_1 et E_2 sont les droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations respectives $3x - 2y = 0$ et $2x - y = 0$.
2. Soit D_1 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x - y = 0$ et D_2 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + y = 0$. Calculer l'image du vecteur (x_0, y_0) par la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

Exercice 24.

1. Soient D_1 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x - y = 0$ et D_2 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + 4y = 0$. Trouver une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que la matrice de la symétrie s sur D_1 parallèlement à D_2 soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $8x - 5y = 0$. Calculer la matrice $p(D)$ de la projection orthogonale sur D. Remarquer que $p^2 = p$ et trouver une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle l'application p a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.