
Feuille d'exercices n° 6

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

1. $a = 2867$ et $b = 6$;
2. $a = 7813$ et $b = -12$;
3. $a = -959$ et $b = 6$;
4. $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 2. Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$.

1. Montrer que, si p divise q , alors $2^p - 1$ divise $2^q - 1$.
2. On note r le reste de la division euclidienne de q par p .
Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^q - 1$ par $2^p - 1$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $7a - 4b^3 = 1$.

Indication : regarder l'équation modulo 7 et distinguer selon la classe de b modulo 7.

Exercice 4.

1. (a) Déterminer $k_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $7^{k_0} \equiv 1 [12]$.
(b) Déterminer $k_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que $6^{k_1} \equiv 0 [12]$.
(c) Déterminer $(k_2, k'_2) \in \mathbf{N}^2$ tels que $k_2 < k'_2$ et $3^{k_2} \equiv 3^{k'_2} [12]$.
(d) Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30} , 6^{13} , 3^{17} , 31^{77} , $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5. Déterminer le dernier chiffre dans l'écriture décimale de 3^{1111} .

Exercice 6. Calculer le plus grand commun diviseur des nombres suivants :

- 1) 126, 230. 2) 390, 720, 450. 3) 180, 606, 750.

Exercice 7. Déterminer les couples d'entiers naturels (n, m) tels que :

- 1) $\text{pgcd}(n, m) = 18$ et $n + m = 360$. 2) $\text{pgcd}(n, m) = 18$ et $nm = 6480$.

Exercice 8.

1. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si $(a + b) \wedge (ab) = 1$.
2. A-t-on, pour tout $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, $a \wedge b = (a + b) \wedge (ab)$?

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que la fraction $\frac{n+9}{n+2}$ soit irréductible.

Exercice 10.

1. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 6$ et $p \vee q = 21$.
2. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 5$ et $p \vee q = 0$.
3. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 35$ et $p \vee q = 210$.
4. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 7$ et $p q = 21$.
5. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 2$ et $p q = 8$.
6. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \vee q = 7$ et $p q = 20$.
7. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \vee q = 35$ et $p q = 175$.

Exercice 11.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 12.

1. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre de diviseurs positifs de N et leur somme.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possédant 6 diviseurs positifs de somme 28.

Exercice 13. Montrer que, pour tout entier n , $n^5 - n$ est divisible par 15.

Exercice 14.

1. Résoudre en $n \in \mathbf{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 1 & [20] \\ n \equiv 3 & [7] \end{cases}$.
2. Résoudre en $n \in \mathbf{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 13 & [15] \\ n \equiv 6 & [10] \end{cases}$.
3. Résoudre en $n \in \mathbf{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 11 & [15] \\ n \equiv 6 & [10] \end{cases}$.

Exercice 15. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

1. Montrer que si $a \wedge b = 1$, alors, pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, on a :
 $ap = bq$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $p = bk$ et $q = ak$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 16. Résoudre en $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ les équations suivantes

1. $18a + 5b = 11$;
2. $39a - 12b = 121$;
3. $14a - 21b = 49$.