Université Claude Bernard - Lyon 1
Math I - CPGEI

Semestre automne 2014-2015

Feuille d'exercices d'algèbre numéro 5

NOMBRES COMPLEXES (TROISIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE)

Polygones

Exercice 1

Soit u et v deux nombres complexes. Établir l'identité suivante, dite “du parallélogramme" :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Pourquoi ce nom ?

Exercice 2

Soit a, b, c et d quatre nombres complexes distincts qui vérifient les deux relations :

$$a + c = b + d \qquad \text{et} \qquad a + ib = c + id.$$

Que peut-on dire du quadrilatère formé des quatre points ayant ces nombres complexes pour affixes ?

Exercice 3

Soit a, b et c trois nombres complexes qui sont affixes de trois points qui forment dans le plan un triangle équilatéral. Montrer que :

$$\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^3 = 1.$$

Exercice 4

Sur chacun des côtés d'un quadrilatère convexe, on construit un carré, à l'extérieur du quadrilatère initial. On relie par deux segments les centres des carrés construits sur des côtés opposés du quadrilatère initial. Montrer, en utilisant des calculs dans le plan complexe, que les deux segments ainsi construits sont perpendiculaires et ont la même longueur.

Exercice 5

Soit θ un réel, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

1) Déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 - 2z^3 \cos\theta + 1 = 0$.

2) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles les sommets d'un hexagone régulier ?

Transformations affines

Exercice 6

On rappelle l'identification canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array}.$$

1. Identifier les transformations complexes suivantes :

$$f_1(z) = z + 3 - 2i;\ f_2(z) = e^{i2\pi/7}z;\ f_3(z) = e^{i2\pi/3}z - 1;\ f_4(z) = 3z - 5 + i;\ f_5(z) = (2+2i)z + 3i.$$

2. Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui representent des transformations du plan suivantes :
   (a) La translation du vecteur d'affixe $-2+i$;
   (b) La symétrie centrale du centre i ;
   (c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
   (d) L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1+2i.$;
   (e) La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.
3. Décrire géométriquement et déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.
$$\varphi_1 : \ z \mapsto \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3; \qquad \varphi_2 : \ z \mapsto i\,\bar{z}.$$
4. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
5. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 7

Soit s une similitude directe telle que $s(2-i)=1$ et $s(-1+2i)=1+6i$. Déterminer l'homothetie h et la rotation r telles que $s=h\circ r$. Donner l'affixe du point fixe de s.

Exercice 8

Rappeler ou découvrir l'expression en terme de nombres complexes des transformations suivantes :

1) Pour v un complexe, la translation de vecteur v.

2) Pour a complexe et λ réel non nul, l'homothétie de centre a et de rapport λ.

3) Pour a complexe et θ réel, la rotation de centre a et d'angle θ.

4) Pour a complexe et θ réel, la symétrie par rapport à un axe passant par a et faisant un angle θ avec l'axe réel.

Exercice 9

On dit qu'un ensemble d'applications est stable par composition lorsque pour toutes f et g lui appartenant, $f\circ g$ lui appartient aussi. Les ensembles suivants de transformations planes sont-ils ou non stables par composition ?

1) L'ensemble des translations ?

2) L'ensemble des homothéties ?

3) L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 ?

4) L'ensemble des homothéties et des translations ?

5) L'ensemble des symétries par rapport à des droites ?

6) L'ensemble des rotations ?

7) L'ensemble des symétries et des rotations ?

8) L'ensemble des symétries, des rotations et des translations ?

9) L'ensemble des similitudes directes ?

10) L'ensemble des similitudes directes et des translations ?

Exercice 10

On se place dans le plan complexe. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z, associe le point M_0 d'affixe $z_0 = jz+3$.

1. Déterminer les points invariants (fixes) de r, et la nature de la transformation r.
2. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2.
3. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où on note $r^2 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Exercice 11

On indéntifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On considère la transformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) = 2\overline{z} + 3 - 4i.$$

1. Calculer le(s) points invariant(s) de f.
2. Donner une équation cartésienne du cercle C de centre $1 - i$ et de rayon 2.
3. Calculer $f(1 - i)$. En déduire une équation cartésienne de l'image de C par transformation f.
4. Quelle est la nature de l'application f ?

Exercice 12

Soient $f : z \mapsto -z - 2i$ et $g : z \mapsto 2z - 1 - i$ deux transformaions du plan complexe.

1. Déterminer les points fixes de f et g.
2. Montrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
3. Montrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
4. Montrer que ces trois centres sont alignés.

Quelques ensembles de points

Exercice 13

Pour chacune des relations suivantes, déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui la vérifient :

1) $|(1-i)z - 3i| = 3$ 2) $|1 - z| \leq 1/2$ 3) $\mathcal{R}e(1 - z) \leq 1/2$ 4) $\mathcal{R}e(iz) \leq 1/2$
5) $|1 - 1/z|^2 = 2$ 6) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$ 7) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$ 8) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| < 2.$

Exercice 14

Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\right\}$ est contenu dans le cercle de centre 1/2 et de rayon 1/2. Est-ce le cercle tout entier ?