Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices d'algèbre n° 4

NOMBRES COMPLEXES (DEUXIÈME PARTIE : TRIGONOMÉTRIE)

Exercice 1.

1. Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Racines de l'unité

Exercice 2. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $^3 = -8i$; **2**. $z^5 - z = 0$; **3**. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$;
4. $z^2\bar{z}^7 = 1$; **5**. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2. Calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.
3. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 4. Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{18}\left(z - e^{2ik\pi/19}\right)^2 = 19z^2;$$

$$\sum_{k=0}^{18}\left|z - e^{2ik\pi/19}\right|^2 = 19(1+|z|^2).$$

Valeurs trigonométriques d'angles remarquables

Exercice 5. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$ puis l'on définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 6.

1. Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1+i)$.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 7. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Quelle relation simple lie les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\omega + \frac{1}{\omega}$?
2. Justifier l'identité :

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0.$$

3. Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

D'autres applications à la trigonométrie

Exercice 8. *Réduction de $a\cos x + b\sin x$.*

1. Soit a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \theta).$$

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 9. Linéariser les expressions suivantes :

$$\mathbf{1}.\ \cos^2(\varphi) \qquad \mathbf{2}.\sin^3(\varphi) \qquad \mathbf{3}.\ \cos(5\varphi)\cdot\sin(3\varphi).$$

Exercice 10.

1. Pour z complexe non nul, développer : $(z^2 - 1/z^2)^3(z + 1/z)$.
2. Linéariser $\cos^5(\varphi)\cdot\sin^3(\varphi)$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)\ .$$