Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Math I Algèbre - CPGEI

Feuille d'exercices d'algèbre n° 3

NOMBRES COMPLEXES (PREMIÈRE PARTIE : SANS LA FORME TRIGONOMÉTRIQUE)

---

1 Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

1. Calculer $i^n,\ n \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $(1+i)^8$.

Exercice 2.

1. Écrire le conjugué de $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Soit z un complexe. Quel est le conjugué de $w = \dfrac{2z^2-i}{5z+1}$?

Exercice 3.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & - & by & = & c \\ bx & + & ay & = & d \end{array} \right. .$$

Exercice 4. On note $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels et z un complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors aussi $P(\overline{z}) = 0$
2. Calculer $j\overline{j}$ et $j + \overline{j}$.
3. En déduire $j(-1-j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?
4. Résoudre l'équation $z^3 = 1$.
5. Justifier le plus économiquement possible que $\overline{j} = \dfrac{1}{j} = j^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Soit u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Exercice 10.
Soit u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1. Montrer que pour tout complexe z, le nombre complexe : $\left(\dfrac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 11.
La notation j désigne le complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ étudié à l'exercice 4.
On note F l'application de $\mathbb{C}^3$ vers C^3 définie pour tout (u, v, w) de $\mathbb{C}^3$ par :

$$F(u, v, w) = (u + v + w, u + jv + j^2w, u + j^2v + jw).$$

1. Calculer $F \circ F$. En déduire que F est bijective et que $F^{-1} = \dfrac{1}{9}(F \circ F \circ F)$.
2. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$. Montrer l'équivalence suivante :

$$F(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \iff u \in \mathbb{R},\ v + w \in \mathbb{R} \text{ et } jv + j^2w \in \mathbb{R}.$$

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante plus simple que celle trouvée à la question précédente pour que $F(u, v, w)$ soit dans $\mathbb{R}^3$.

2 Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $\Delta_1 = 3 + 4i,\ \Delta_2 = 8 - 6i,\ \Delta_3 = -25,\ \Delta_4 = 49,\ \Delta_5 = 50i.$

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $z^2 + 2z + 10 = 0$ **2**. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ **3**. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante :

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0.$

1. Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
3. Résoudre l'équation.