

**Feuille d'exercices n° 3**

ÉTUDES DE FONCTIONS

**Exercice 1.**

1. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbf{R}$  qui vérifient :
  - (a)  $\lfloor x \rfloor = 0$ ;
  - (b)  $\lfloor x \rfloor = -3$ ;
  - (c)  $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$ .
2. Représenter graphiquement l'application  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$ .

**Exercice 2.** Étudier l'existence d'une limite de  $f$  au point  $a$  pour les données suivantes :

1.  $a = 1$  et  $f : \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ ;
2.  $a = 0$  et  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ ;
3.  $a = +\infty$  et  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ ;
4.  $a = -\infty$  et  $f : ]-\infty, -5] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 3 + \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$ ;
5.  $a = 0$  et  $f : ]0, \frac{\pi}{3}[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{\sin(3x)}$ ;
6.  $a = 0$  et  $f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ .

*Indication :* on rappelle que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq}} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Exercice 3.** Étudier la continuité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine :

1.  $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
2.  $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto E(x) + E(2 - x)$ .

**Exercice 4.** Déterminer en quels points les fonctions qui suivent sont dérivables, et donner leur dérivée.

1.  $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
2.  $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto |x|$ ;
3.  $f_3 : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \ln(\ln x)$ ;
4.  $f_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}}$ ;
5.  $f_5 : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto e^{\frac{1}{x}} (\cos(x))^5$ ;
6.  $f_6 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{\sqrt{x^2 + 1} + 2}$ ;
7.  $f_7 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (x^2 + 1) 2^x$ .

**Exercice 5.**

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $e^x > x$ .
2. On considère  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - x}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .
  - (b) Calculer, si elles existent, les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
*Rappel :*  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ .
  - (c) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - (d) En déduire que  $f$  atteint un maximum sur  $\mathbf{R}$  puis le déterminer.

**Exercice 6.** On pose  $a = 4$  et  $\varepsilon = 0,4$ .

À l'aide du graphe de  $\sqrt{\cdot}$ , déterminer  $\delta > 0$  tel que si  $x \in \mathbf{R}_+$  est tel que  $|x - a| < \delta$ , alors  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ .  
On veillera à préciser par le calcul les valeurs nécessaires.

**Exercice 7.** On définit  $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ .

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de  $f$ .
2. Déterminer en quels points le graphe de  $f$  intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que  $f$  admet des asymptotes en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
5. Déterminer la position du graphe de  $f$  par rapport aux asymptotes.
6. Tracer le graphe de  $f$  avec précision.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > -2$ .  
On veillera à préciser par le calcul les valeurs nécessaires.

**Exercice 8.** On s'intéresse à la fonction tangente.

1. Redémontrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbf{Z}\right)$ ,  $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$ .
2. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de  $\tan$ .
3. Déterminer en quels points le graphe de  $f$  intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
4. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
5. Tracer le graphe de  $\tan$  avec précision.

**Exercice 9.** On définit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto x - \ln(1 + x^2)$ .

*Rappel :*  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ .

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de  $f$ .
2. Déterminer en quels points le graphe de  $f$  intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que  $f$  admet des directions asymptotiques en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , mais pas d'asymptotes.
5. Tracer le graphe de  $f$  avec précision.

**Exercice 10.** *Folium de Descartes.*

On définit d'abord  $x : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $t \mapsto \frac{3t}{1+t^3}$  et  $y : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $t \mapsto \frac{3t^2}{1+t^3}$  puis  $\gamma : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

L'objectif de cet exercice est de tracer la courbe  $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}\}$ .

1. Calculer, pour tout  $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$ ,  $x(1/t)$  et  $y(1/t)$ .  
En déduire que l'on peut se ramener à étudier  $\gamma$  sur  $] -1, 1]$ .
2. Dresser les tableaux de variation de  $x$  et de  $y$ .
3. (a) Calculer, pour tout  $t \in ] -1, 1]$ ,  $y(t) - (-x(t) - 1)$ .  
(b) Déterminer le signe de cette expression pour  $t \in ] -1, 1]$ , puis sa limite quand  $t$  tend vers  $-1$ .  
(c) Que peut-on en déduire pour la courbe  $\Gamma$  ?
4. Tracer  $\Gamma$ .
5. On définit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ . Calculer  $f \circ \gamma$ .

**Exercice 11.** Montrer qu'existent et déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{e^{x \cos(x)} - 1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{\cos(1+x) - \cos(1-x)}{x}.$$

**Exercice 12.**

1. Montrer que, pour tout  $x > 0$ , l'on a :  $e^x > 1 + \frac{1}{2}x^2$ .
2. Montrer que la limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2}$  existe et la calculer.

**Exercice 13.**

1. Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  continue, et dérivable sur l'intérieur de  $I$ .  
Montrer que si  $f'$  est croissante, alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit alors que  $f$  est *convexe*.

2. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$  et tout  $t \in [0, 1]$ , l'on a :

$$\ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(y).$$

3. Soit  $(p, q) \in [1, +\infty[$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   
(a) Montrer que, pour tout  $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$ , l'on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

- (b) En déduire que, pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}_+$  et tout  $\lambda > 0$ ,

$$ab \leq \lambda^p \frac{a^p}{p} + \lambda^{-q} \frac{b^q}{q}.$$

- (c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$ ,

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Exercice 14.**

1. Montrer que l'application  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto e^{x^7+x^5+1}$  est injective.
2. Déterminer  $E \subset \mathbf{R}$  tel que  $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow E, x \mapsto f(x)$  soit une bijection.

**Exercice 15.** Déterminer si elles existent les valeurs des minima ou des maxima des ensembles qui suivent.

1.  $A_1 = \left\{ \frac{1+x}{1+x^2} \mid x \in \mathbf{R} \right\};$
2.  $A_2 = \{ x^4 - 6x^2 \mid x \in \mathbf{R} \};$
3.  $A_3 = \{ 6x - x^2 \mid x \in [2, 5] \};$
4.  $A_4 = \{ x^2 + y^2 \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, xy = 1 \};$

**Exercice 16.** Représenter graphiquement l'application  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \arcsin(\cos x)$ .

**Exercice 17.** Étudier la fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \arcsin x + \arccos x$ .

**Exercice 18.** Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  et que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_-^*$ ,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 19.** On définit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x - \ln(\operatorname{ch} x)$ .

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de  $f$ .
2. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. Montrer que le graphe de  $f$  admet des asymptotes en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
4. Déterminer en quels points le graphe de  $f$  intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
5. Donner une équation de la tangente en les points précédents.
6. Tracer le graphe de  $f$  avec précision.
7. Déterminer graphiquement les ensembles suivants :  $f(\mathbf{R}), f([0, +\infty[)$  et  $f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$ .

**Exercice 20.** On définit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \cos(3x) \times \cos^3 x$ .

1. Montrer que  $f$  est paire et  $2\pi$ -périodique.
2. Étudier les variations de  $f$  puis construire sa courbe représentative.