Feuille d'exercices d'analyse n° 2bis

Applications et quantificateurs

Objectifs

1. Définition d'une application, comprendre l'importance de l'ensemble de départ, de l'ensemble d'arrivée ;
2. savoir utiliser les quantificateurs, comprendre l'importance de l'ordre des quantificateurs, savoir les appliquer aux applications ;
3. définition de l'injectivité, surjectivité et bijectivité, exemples et contre-exemple, lien avec l'image directe.

Applications

Définition d'une application

Exercice 1. Décider si les formules suivantes définissent des applications. Dans le cas contraire, corriger si possible.

1. $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, x \mapsto x$;
2. $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}, x \mapsto x$;
3. $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}, x \mapsto x$;
4. $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}, x \mapsto x$;
5. $f : \{\text{bleu,rouge,jaune}\} \to \{\text{bleu,jaune,rouge}\}, x \mapsto x$;
6. $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3$;
7. $f^{-1}(\{1\}) = \{3\},\ f^{-1}(\{2\}) = \{1\},\ f^{-1}(\{3\}) = \{2\}$;
8. $f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\},\ f^{-1}(\{2\}) = \{1\},\ f^{-1}(\{3\}) = \{3\}$.

Exercice 2. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbf{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
4. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;
5. $f : \{\, x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3| \,\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\to \mathbf{R},\ x \mapsto 0$;
6. $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x$.

Quantificateurs et applications

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. la fonction f s'annule ;
2. la fonction f est toujours nulle ;
3. f n'est pas une fonction constante ;
4. f est croissante ;
5. f est décroissante ;
6. f présente un minimum ;
7. f présente un maximum.

Exercice 4. Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

Image directe, image réciproque d'une application

Exercice 5. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par $f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A=\{2\}$, $A=\{1,2\}$, $A=\{3\}$.

Exercice 6. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\cos^{-1}([0,1])$;
4. $\left(\cos_{\mid [3,7]}\right)^{-1}([0,1])$;
5. $\left(\cos_{\mid [0,\pi]}\right)^{-1}([0,1])$;
6. $\sqrt{\cdot}\,([0,1])$;
7. $f^{-1}([0,1])$ pour $f ; \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;
10. $f^{-1}([-1,1[\cup\{2\})$ et $f([0,1]^3)$ pour $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x,y,z) \mapsto y$;
11. $|\cdot|([-2,-1] \cup [2,4[)$;
12. $\left(|\cdot|_{\mid [-8,7]}\right)^{-1}([2,3])$;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$;
14. $\exp(]-\infty,2])$;
15. $\exp^{-1}([-1,e])$;
16. $\ln(\mathbf{R}_-)$;
17. $\ln^{-1}([3,+\infty[)$.

Exercice 7. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ .$$
2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.
3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \ .$$

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 8. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

1. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;
2. $[\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$;
3. $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
4. $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$;
5. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
6. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
7. $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 7, 9, 11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
8. $\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1\}$, $x \mapsto -(x - 1)$;
9. $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $f \mapsto f(0)$.

Exercice 9.

1. On considère l'application $f : I \to J, x \mapsto x^2$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbf{R}$. Trouver I et J tels que :
   (a) f est injective mais pas surjective ;
   (b) f est surjective mais pas injective ;
   (c) f est bijective.
2. Peut-on simplifier les exemples de la question précédente en considérant d'autres ensembles plus simple que des intervalles ?

Exercice 10. Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \to F$ une application de E dans F. Montrer que f est bijective ssi f est surjective ssi f est injective.

Exercice 11. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 12. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$.

Exercice 13. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Prennons un exemple : $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $F = \{w, x, y, z\}$ et $f : E \to F$ définie comme suit $f(\alpha) = x$, $f(\beta) = y$, $f(\gamma) = x$, $f(\delta) = w$.
   (a) Est-ce que f est injective, surjective ou ni l'un ni l'autre ?
   (b) Soit $B = \{x, y, z\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$ puis $f(f^{-1}(B))$ et comparer avec B.
   (c) Soit $A = \{\beta, \gamma\}$. Déterminer $f(A)$ puis $f^{-1}(f(A))$ et comparer avec A.

2. Soit $B \subset F$.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
   (b) À quelle condition a-t-on $f(f^{-1}(B)) = B$?
3. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
4. Soit $A \subset E$.
   (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Que peut-on dire si $f_{|\, f^{-1}(f(A))}$ est injective ?
5. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 14. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que, pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
2. En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Montrer que, pour tout $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.