Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Math I Algèbre - Parcours Prépa

Feuille d'exercices d' Algèbre n° 2

BIJECTIONS ET DÉNOMBREMENT

Exercice 1.

1. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1, 3]$ et $B =]2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3, 8[\cap\mathbb{Z}$, $[-3, 2[\cap\mathbb{N}$ et $]0, 1[\cap\mathbb{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties $]-\infty, 0]$ et $[1, 2[$.
5. Déterminer $]-2, 3] \setminus \mathbb{Z}$, $]-2, 3] \setminus [0, 4]$ et $]-2, 3] \setminus [-4, 4]$.

Exercice 2.

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Écrire les ensembles suivants en extension.
   (a) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2 \}$;
   (b) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n < 1 \}$;
   (c) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2 \}$;
   (d) $\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \}$;
   (e) $\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n < m \}$;
   (f) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12 \text{ ou } n \text{ divise } 55 \}$;
   (g) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7 \}$.

Exercice 3. Décider si les ensembles suivants sont vides.

1. $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 3x \geq 2 \right\}$;
2. $\left\{ x \in \mathbb{R}_- \;\middle|\; \dfrac{x+1}{2x-1} > 4 \right\}$;
3. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 3xy + 4y^2 = -1 \right\}$;
4. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 3xy + 4y^2 = 4 \right\}$;
5. $\{ (x, y) \in [0, 5] \times [0, 3] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0 \}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et
   $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;

(b) $A \cap B = A$;

(c) $A \cup B = B$;

(d) $A \setminus B = \emptyset$.

3. Montrer l'équivalence des propositions :

(a) $A \cup B = A \cap C$;

(b) $B \subset A \subset C$.

4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C\ .$$

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ 2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ 3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-y, 4x-2y) \end{cases}$ 4. $k : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 6. Soit :

$$f \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \quad \text{et soit} \quad g \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer fog et gof.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, +1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 8. Soit f une application de E vers F avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Exercice 9. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 10. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Exercice 11. Indicatrice d'une partie d'un ensemble
Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de parties de E. Soit A une partie de E : $A \in \mathcal{P}(E)$. On note $\overline{A} = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E.
Pour tout $A \subset E$ on définie une fonction *indicatrice de* A sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$, notée $\mathbb{1}_A$, définie pour $\forall x \in E$ par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A}. \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :
   (a) Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b, c\} \subset E$ et $B = \{c, d\} \subset E$. Expliciter les fonctions $\mathbb{1}_E$, $\mathbb{1}_\emptyset$, $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_B$ ainsi que $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
   (b) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$ sa fonction indicatrice sur $\mathbb{R}$. Décrire les ensembles $\mathbb{1}_A(A)$, $\mathbb{1}_A(\overline{A})$, $\mathbb{1}_A(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0; 1\})$.
2. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :
   (a) Inclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. (Cela veut dire que pour $\forall x \in E$, on a $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.)
   Égalité : $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
   (b) Opérations ensemblistes :
   $$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A; \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B; \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B.$$
   (c) Lien avec le cardinal : si A est une partie finie de E alors $|A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$.
3. <u>Formule du crible.</u> Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que
   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
4. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.
   (a) Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$?
   (b) Soit
   $$\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F} : \ A \mapsto \mathbb{1}_A$$
   une application qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice. Montrer que ϕ est une application injective. En déduire que ϕ est bijective.
   (c) En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et calculer son cardinal.
5. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Calculer $\displaystyle\sum_{A,B\subset E} |A \cap B|$, $\displaystyle\sum_{A,B\subset E} |A \cup B|$.

Exercice 12. Deux autres preuves
Soit E un ensemble, avec $\text{Card}(E) = n$. Démontrer que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$,
— en utilisant les coefficients $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$;
— en raisonnant par récurrence sur n.

Exercice 13. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$