Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Devoir n° 2

PARTIE COMMUNE DU 15 OCTOBRE 2014

Rappel sur la dérivée n-ième (pour les exercices 3 et 4)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui même et soit $n \geq 1$. Pour obtenir $f^{(n)}$, la dérivée n-ième de f, il suffit de dériver n fois la fonction f. Ainsi $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ etc.

Par exemple si

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^4, \end{aligned}$$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$ et pour tout $n \geq 5$, $f^{(n)}(x) = 0$.

<u>Exercice 1.</u> Soit une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. $u_0 = 5$
2. $u_1 = 18$
3. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 5)3^n$.

<u>Exercice 2.</u> Soit l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto 3a + 5b. \end{aligned}$$

1. Calculer $f(1, 1)$ et $f(3, 0)$. Puis montrer que $10 \in f(\mathbb{N}^2)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in f(\mathbb{N}^2)$ alors $n + 3 \in f(\mathbb{N}^2)$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 8$, $n \in f(\mathbb{N}^2)$.
4. Déterminer $f(\mathbb{N}^2)$.

<u>Exercice 3.</u> On suppose que les fonctions sont bien infiniment dérivables sur leur domaine de définition, ce n'est pas nécessaire de le montrer.

Pour cet exercice et seulement pour celui-ci, on n'attend pas une explicitation complète des récurrences. On acceptera des réponses du type *"Par une récurrence facile on obtient..."*.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui même définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   En déduire, pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$.
2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   En déduire, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$.

3. Soit les fonctions f, g et h de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$ et $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
   (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f'(x)$, $f''(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
   (b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$.
   (c) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une expression de $h^{(n)}$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{n-1} e^{1/x}. \end{aligned}$$

On suppose que f_n est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, ce n'est pas nécessaire de le démontrer.

1. Question préliminaire : soit deux fonctions g et h de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ infiniment dérivable vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = xh(x)$.

   Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g^{(n+1)}(x) = (n+1)h^{(n)}(x) + xh^{(n+1)}(x).$$

2. En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$, déduire que pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}$.

Exercice 5. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. L'ensemble des parties de l'ensemble vide est vide.
2. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^6 + 1. \end{aligned}$$

   La fonction f est une injection.
3. Soit la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto 1/x. \end{aligned}$$

   La fonction g est une bijection.