1) Soit n un entier naturel. Alors $(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n) = 0$ puisque f est constante. On conclut que Δf est l'application nulle.

2) a) Soit n un entier naturel. On calcule $(\Delta m_1)(n) = m_1(n+1) - m_1(n) = (n+1) - n = 1 = n^0 = m_0(n)$. On conclut que $\Delta m_1 = m_0$.

b) Soit n un entier naturel. On calcule $(\Delta m_2)(n) = m_2(n+1) - m_2(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = 2n^1 + n^0 = 2m_1(n) + m_0(n)$. On conclut que $\Delta m_2 = 2m_1 + m_0$.

c) Soit n un entier naturel. On calcule $(\Delta m_3)(n) = m_3(n+1) - m_3(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3m_2(n) + 3m_1(n) + m_0(n)$. On conclut que $\Delta m_3 = 3m_2 + 3m_1 + m_0$.

d) On remarque d'abord -c'est évident sur la définition- que $\Delta(\frac{m_3}{3} - \frac{m_2}{2} + \frac{m_1}{6}) = \frac{\Delta m_3}{3} - \frac{\Delta m_2}{2} + \frac{\Delta m_1}{6}$. On remplace chacun des trois Δm_k utilisés dans cette dernière expression par son expression, calculée précédemment : on obtient $\frac{3m_2 + 3m_1 + m_0}{3} - \frac{2m_1 + m_0}{2} + \frac{m_0}{6} = m_2$.

e) Pour n entier, on refait un calcul comme au b) ou au c) mais ce coup-ci on utilise la formule du binôme de Newton en toute généralité. On obtient :

$$(\Delta m_k)(n) = (n+1)^k - n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} n^i - n^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} m_i(n).$$

Une fois ceci écrit, on constate que si, pour chaque i entre 0 et $k-1$, $a_i = \binom{n}{i}$, ces constantes répondent à la question. Elles sont notoirement entières (par exemple via leur interprétation combinatoire).

3) a) Soit n un entier naturel. On calcule $(\Delta e_2)(n) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n = e_2(n)$. On conclut que $\Delta e_2 = e_2$.

b) Un calcul absolument similaire fournit $\Delta e_q = (q-1)e_q$.

4) a) Soit n un entier naturel. On calcule stupidement :

$$\begin{aligned}(\Delta s_\alpha)(n) &= \sin(n\alpha + \alpha) - \sin(n\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha - \sin(n\alpha)\\ &= (\cos\alpha - 1)\sin(n\alpha) + (\sin\alpha)\cos(n\alpha) = (\cos\alpha - 1)s_\alpha(n) + (\sin\alpha)c_\alpha(n).\end{aligned}$$

Le calcul analogue pour c_α n'est pas plus difficile, je ne l'écris pas sur ce corrigé (mais il est bien entendu attendu sur la copie).

b) On utilise les descriptions de Δs_α et Δc_α du a) ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta s_\alpha) &= (\cos\alpha - 1)\Delta s_\alpha + (\sin\alpha)(\Delta c_\alpha)\\ &= (\cos\alpha - 1)\Delta s_\alpha + \sin\alpha(\cos\alpha - 1)c\alpha - \sin^2\alpha s_\alpha\\ &= (\cos\alpha - 1)\Delta s\alpha + (\cos\alpha - 1)\left[\Delta s_\alpha - (\cos\alpha - 1)s_\alpha\right] - \sin^2\alpha s_\alpha\\ &= (2\cos\alpha - 2)\Delta s_\alpha - \left[(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\right] s_\alpha\\ &= (2\cos\alpha - 2)\Delta s_\alpha - \left[(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha\right] s_\alpha\\ &= (2\cos\alpha - 2)\Delta s_\alpha - [2 - 2\cos\alpha]s_\alpha\\ &= (2\cos\alpha - 2)\left(\Delta s_\alpha + s_\alpha\right).\end{aligned}$$

L'identité proposée est donc réalisée si on pose $K_\alpha = 2\cos\alpha - 2$.

5) a) * Quand n prend la valeur 0, l'énoncé à prouver est évident.
* Soit n un entier naturel. Supposons $f(n)$ nul. Comme Δf est l'application nulle, en particulier la valeur $(\Delta f)(n)$ est nulle, en d'autres termes $f(n+1) - f(n) = 0$. On en déduit que $f(n+1) = 0$.
* La conjonction de ces deux vérifications assure, par utilisation de la récurrence, que $f(n)$ est toujours nul.

b) Le a) a montré que si une application f est solution de (E), elle est constante. On n'aura pas tous les points à la question si on ne souligne pas d'une façon ou d'une autre que, réciproquement, les applications constantes sont solutions de (E) (ce qui a été l'objet de la très facile question 1). Les deux informations mises bout à bout concluent.

6) a) * Quand n prend la valeur 1, puisque $(\Delta f)(0) = m_2(0) = 0^2$, on voit que $f(1) - f(0) = 0$ et comme $f(0) = 0$ on obtient $f(1) = 0$. De l'autre côté de l'identité à prouver, la somme se réduit à $\sum_{k=0}^{0} k^2$ c'est-à-dire à 0 : l'énoncé proposé est donc vrai.

* Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et supposons que, pour cette valeur :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

Comme $f(n+1) - f(n) = (\Delta f)(n) = m_2(n) = n^2$, on en déduit que :

$$f(n+1) = f(n) + (f(n+1) - f(n)) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

* La conjonction de ces deux vérifications assure, par utilisation de la récurrence, que l'énoncé suggéré est vrai pour toute valeur entière supérieure ou égale à 1 de n. (Note : le sujet a demandé une vérification pour $n \geq 1$ pour ne pas perdre trop de monde en route, mais ça marche aussi pour $n = 0$ si on comprend bien qu'une somme pour k variant de 0 à -1 est une somme de rien, et que les sommes de rien valent zéro par convention).

b) Soit f une solution de (E') telle que $f(0) = 0$. Le a) a montré que toutes les valeurs $f(n)$ sont alors imposées par ces deux contraintes. On en conclut que (E') possède au plus une solution telle que $f(0) = 0$. Réciproquement, définissons une application f de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et, pour tout } n \geq 1,\ f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

On vérifie alors sans la moindre difficulté que cette fonction répond au cahier des charges. D'où l'existence de la solution proposée.

On trouvera une expression simple de f en se souvenant qu'on a traité, naguère, la question 2 c) : la fonction $m_3/3 - m_2/2 + m_1/6$ est solution de (E'), et il est manifeste qu'elle s'annule en zéro. Vu l'unicité d'une telle solution, elle est égale à celle qu'on a écrite un peu plus haut et on conclut que :

$$\text{pour tout } n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = (\frac{m_3}{3} - \frac{m_2}{2} + \frac{m_1}{6})(n) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

7) a) Encore une récurrence sur n, je ne la tape pas.

b) La vérification est idiote : $g(0) = f(0) - 2^0 f(0) = 0$. Pour chaque $n \geq 0$ on calcule ensuite : $g(n+1) - g(n) = f(n+1) - f(n) - (2^{n+1} - 2^n)f(0) = f(n) - n^n f(0) = g(n)$: on constate ainsi que g est solution de (E''). On constate alors que g vérifie les deux hypothèses du a) donc aussi sa conclusion ; mais c'est précisément dire que pour tout nn $f(n) = 2^n f(0)$.

c) On a vu au b) que toute solution de (E'') était de la forme λe_2 pour un λ réel. On a par ailleurs vu au 3 a) que e_2 était une solution de (E'') - et il en découle aussitôt que toutes les λe_2 sont des solutions de (E''). En synthétisant les deux informations, les solutions de (E'') sont exactement les λe_2, où λ varie dans $\mathbf{R}$.

8) Soit f application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ et soit m un entier naturel. Si on est pointilleux, on montrera la formule suggérée par récurrence sur $n \geq m+1$, mais il est parfaitement tolérable d'utiliser quelques points de suspension pour voir la somme se simplifier télescopiquement pour chaque $n \geq m+1$ comme suit :

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) + \sum_{k=0}^{n-m-1} (\Delta f)(m+k) \\ &= f(m) + (-f(m) + f(m+1)) + (-f(m+1) + f(m+2)) + \cdots + (-f(n-1) + f(n)) = f(n). \end{aligned}$$

9) Question très facile ! g est croissante si et seulement si pour tout n entier naturel, $g(n) \leq g(n+1)$ si et seulement si pour tout n entier naturel $g(n+1) - g(n) \geq 0$, autrement dit si et seulement si Δg ne prend que des valeurs positives.

10) a) Supposons $(\Delta f)(a)$ strictement positif. Vu l'hypothèse sur le signe de $\Delta(\Delta f)$ et la question 9, la fonction Δg est croissante : elle prend donc des valeurs strictement positives en tout entier supérieur ou égal à a, et en particulier en tout entier compris au sens large entre a et $b-1$. Si on écrit la formule du 8 pour les valeurs suggérées par l'énoncé, le terme initial $f(a)$ est nul, puis tous les termes de la sommation (qui n'est pas vide puisque $a < b$) sont strictement positifs. On en conclut que $0 < f(b)$ ce qui contredit une hypothèse. Pour l'autre inégalité, ça fonctionne dans l'autre sens : si on suppose $(\Delta f)(b-1)$ strictement négatif, tous les termes de la sommation sont strictement négatifs et on obtient $f(b) < 0$ ce qui est tout aussi absurde.

b) Vu la croissance de Δf et le signe de $(\Delta f)(b-1)$, on voit que la fonction Δf prend des valeurs positives en tout entier supérieur ou égal à $b-1$ et en particulier en tout entier compris au sens large entre b et $d-1$. En écrivant la formule du 8 pour les valeurs suggérées, on exprime $f(d)$ comme somme de $f(b) = 0$ et de termes tous positifs, et on conclut que $0 \leq f(d)$.

c) La question demande un peu plus d'initiative. On la résoudra en discutant selon le signe de $(\Delta f)(c)$. On se débarrasse d'abord des cas $c = a$ ou $c = b$, où la démonstration qui suit ne marche pas parfaitement (problèmes d'inégalités qui ne sont plus strictes) : pour ces valeurs particulières de c, le résultat est évident, puisque $f(a) = f(b) = 0$ est bien négatif. Dans la suite, on supposera donc $a < c < b$.
Premier cas : si $(\Delta f)(c)$ est négatif. Dans ce cas, vu la croissance de Δf, cette fonction prend des valeurs négatives en tout entier inférieur ou égal à c et en particulier en tout entier compris entre a et $c-1$ au sens large. On écrit alors la formule du 8) pour $m = a$ et $n = c$: elle calcule $f(c)$ comme somme du terme nul $f(a)$ et d'une sommation de termes tous négatifs. D'où on conclut que $f(c)$ est négatif.
Second cas : si $(\Delta f)(c)$ est strictement positif. On focalise alors son regard entre c et b : la croissance de Δf assure cette fois sa positivité (et même sa positivité stricte, mais ça ne sert pas) entre c et $b-1$ au sens large. On écrit alors la formule du 8) entre c et b : cette fois-ci elle calcule $f(b)$ qui vaut par ailleurs zéro comme somme de $f(c)$ et d'une sommation de termes tous positifs. Ce n'est possible que si $f(c)$ est négatif.