**Exercice 1**
On va montrer par récurrence forte sur l'entier $n \geq 0$ l'énoncé :

$$(H_n) \qquad \text{“}u_n = (n+5)3^n\text{”}.$$

* Lorsque $n = 0$, ceci découle de 1, et lorsque $n = 1$, ceci découle de 2.
* Soit $n \geq 1$ fixé, supposons $(H_k)$ vrai pour tout entier naturel $k$ inférieur ou égal à $n$, et montrons $(H_{n+1})$. Puisque $n - 1 \geq 0$, on peut appliquer l'hypothèse 3 à cet entier et écrire :

$$u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1}.$$

En appliquant ensuite l'hypothèse de récurrence pour exprimer $u_n$ et $u_{n-1}$, on obtient alors :

$$u_{n+1} = 6(n+5)3^n - 9(n+4)3^{n-1} = 2(n+5)3^{n+1} - (n+4)3^{n+1} = (n+6)3^{n+1} = ((n+1)+5)3^{n+1}.$$

On constate que $(H_{n+1})$ est vraie.
* Des deux points ci-dessus, on conclut le résultat demandé.

**Exercice 2**

1) $f(1,1) = 8$ et $f(3,0) = 9$. $f(0,2) = 10$. Il en découle que 10 possède au moins un antécédent sous $f$, à savoir le couple $(0,2)$, donc qu'il est dans l'image directe par $f$ de l'ensemble de départ.

2) Soit $n$ un entier naturel. Supposons que $n \in (\mathbf{N}^2)$. On peut alors introduire un couple d'entiers naturels $(a,b)$ tel que $f(a,b) = n$. On constate alors que $f(a+1,b) = 3(a+1)+5b = (3a+5b)+3 = n+3$. L'entier $n+3$ possède donc au moins un antécédent.

3) On va montrer par récurrence forte sur $n \geq 8$ l'énoncé :

$$(H_n) \qquad \text{“}n \in f(\mathbf{N}^2)\text{”}.$$

* Si $n$ vaut 8 ou 9, ceci découle du 1) ; si $n$ vaut 10 ceci découle du 2).
* Soit $n \geq 10$ fixé. On suppose que pour tout entier $k$ avec $8 \leq k \leq n$, l'hypothèse $(H_k)$ est vraie, et on va montrer que $(H_{n+1})$ est vraie.
Comme $n \geq 10$, $(n+1) - 3 = n - 2$ est un entier naturel supérieur ou égal à 8 et inférieur ou égal (et même strictement mais qu'importe) à $n$. Par l'hypothèse de récurrence, cet entier est donc dans $f(\mathbf{N}^2)$. Par application du 3) à cet entier, l'entier $((n+1)-3)+3 = n+1$ est aussi dans $f(\mathbf{N}^2)$. Ce qui montre $(H_{n+1})$.
* Des deux points ci-dessus, on conclut le résultat demandé.

4) Il découle de la question précédente que $f(\mathbf{N}^2)$ contient tous les entiers supérieurs ou égaux à 8. On remarque aussi qu'il contient $0 = f(0,0)$, $3 = f(1,0)$, $5 = f(0,1)$ et $6 = f(2,0)$. Prenons un $(a,b)$ dans $\mathbf{N}^2$ distinct des quatre valeurs envisagées dans la phrase précédente. Alors $a+b \geq 2$, et si $a+b = 2$ alors $b$ n'est pas nul ; donc $a+b \geq 3$ ou $(a,b) = (1,1)$ ou $(a,b) = (0,2)$. Dans le premier cas, $f(a,b) \geq 3a+3b \geq 9$, dans le second cas $f(a,b) = 8$ et dans le troisième cas $f(a,b) = 10$ ; dans tous les cas $f(a,b) \geq 8$. Les entiers 0, 3, 5 et 6 sont donc les seuls entiers strictement inférieurs à 8 qui appartiennent à $f(\mathbf{N}^2)$. On en sait assez pour conclure, par exemple sous la forme suivante -ce n'est pas la seule qui soit valable :

$$f(\mathbf{N}^2) = \mathbf{N} \setminus \{1,2,4,7\}.$$

**Exercice 3**

1) On calcule dans un premier temps, pour tout $x$ réel, $f'(x) = ae^{ax}$, on redérive en $f''(x) = a^2e^{ax}$ puis, par une récurrence si facile qu'on tolèrera qu'elle ne soit pas explicitée on conclut que pour tout $n \geq 1$ et tout $x$ réel :

$$f^{(n)}(x) = a^ne^{ax}.$$

2) On est plus à l'aise en réécrivant d'abord pour tout $x$ réel non nul, $f(x) = x^{-1}$, dont on déduit : $f'(x) = -x^{-2}$, puis $f''(x) = 2x^{-3}$, puis $f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$ puis, par une récurrence si facile qu'on tolèrera qu'elle ne soit pas explicitée on conclut que pour tout $n \geq 1$ et tout $x$ réel non nul :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

3) a) On obtient, facilement, pour tout $x$ de valeur absolue différente de 1 :

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ puis } f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ puis } g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

b) Par une récurrence si facile qu'on se garde de l'expliciter on conclut ensuite que pour tout $x$ réel de valeur absolue différente de 1 et tout $n \geq 1$ :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ et } g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

c) On remarque que pour tout $x$ réel de valeur absolue différente de 1 :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2},$$

et donc que $h = \frac{1}{2}(f+g)$. On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $h^{(n)} = \frac{1}{2}(f^{(n)} + g^{(n)}$. On peut essayer de mettre au même dénominateur cette dernière expression, développer les numérateurs par la formule du binôme, regrouper ; certains termes se simplifient mais le résultat n'est pas spécialement beau, je ne pense pas que ça vaille le coup.

**Exercice 4**

1) On va montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ l'énoncé $(H_n)$ qui est, par définition, la ligne de l'énoncé de l'exercice 4 qui commence par un symbole $\forall$.
* Vérifions $(H_1)$ :
on dérive une première fois l'hypothèse $g(x) = xh(x)$ et on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, g'(x) = xh'(x) + h(x).$$

On redérive un coup et on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, g''(x) = xh''(x) + h'(x) + h'(x) = 2h'(x) + h''(x)$$

ce qui est exactement l'énoncé $(H_1)$.
* Soit $n \geq 2$ fixé, supposons l'énoncé $(H_n)$ vrai. En le dérivant un coup on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, g^{(n+2)}(x) = (n+1)h^{(n+1)}(x) + h^{(n+1)}(x) + xh^{(n+2)}(x) = (n+2)h^{(n+1)}(x) + xh^{(n+2)}(x)$$

ce qui est exactement l'énoncé $(H_{n+1})$.
* Des deux points ci-dessus, on conclut le résultat demandé.

2) La remarque préalable qui a été suggérée est évidente, une fois qu'on l'a faite, on va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}.$$

* Pour $n = 1$ on est amené à calculer $f_1'(x)$ pour $x$ réel non nul. C'est facile puisque $f_1$ apparaît comme fonction composée : de $f_1(x) = e^{1/x}$ on déduit aussitôt :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} = \frac{(-1)^1 e^{1/x}}{x^2},$$

et on constate que c'est exactement $(H_1)$.
* Soit $n \geq 1$ fixé. Supposons $(H_n)$ et démontrons $(H_{n+1})$.
On dérive préalablement $(H_n)$ ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}e^{1/x}}{x^{n+3}} + (n+1)\frac{(-1)^{n+1}e^{1/x}}{x^{n+2}}.$$

On va appliquer le 1) à $g = f_{n+1}$ et $h = f_n$. On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)f_n^{(n)}(x) + xf_n^{(n+1)}(x).$$

On y remplace $f_n^{(n)}(x)$ par son expression issue de $(H_n)$ et $f_n^{(n+1)}(x)$ par son expression calculé un peu plus haut, et on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (n+1)\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}e^{1/x}}{x^{n+2}} + (n+1)\frac{(-1)^{n+1}e^{1/x}}{x^{n+1}}. \\ &= \frac{(-1)^{n+1}e^{1/x}}{x^{n+2}}\end{aligned}.$$

On constate avoir obtenu $(H_{n+1})$.
* Des deux points ci-dessus, on conclut le résultat demandé.

**Exercice 5**

1) FAUX ! L'ensemble des parties du vide contient au moins un élément (et en fait exactement un) à savoir l'ensemble vide. Il n'est donc pas vide. On peut préférer penser ça en terme de cardinaux : l'ensemble vide est de cardinal 0, son ensemble des parties est de cardinal $2^0 = 1$ et n'est donc pas vide.

2) FAUX ! $1 \neq -1$ mais $f(1) = f(-1)$. Tout simplement !

3) VRAI ! On peut par exemple calculer $g \circ g$ et constater tomber sur l'application identique. On en déduit que $g$ a une réciproque, donc qu'elle est bijective.