Correction du problème CCP du 15/10/2014

exo 1

1) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \quad \varphi(x) = C$. Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

b) On a de même, $\forall x < 0, \quad \varphi'(x) = 0$ donc $\exists D \in \mathbb{R}, \forall x < 0 \quad \varphi(x) = D$.
Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$ on en déduit que $\forall x < 0, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2) a) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1/a\}$.

b) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2 + (a+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Arctan}'(x).$$

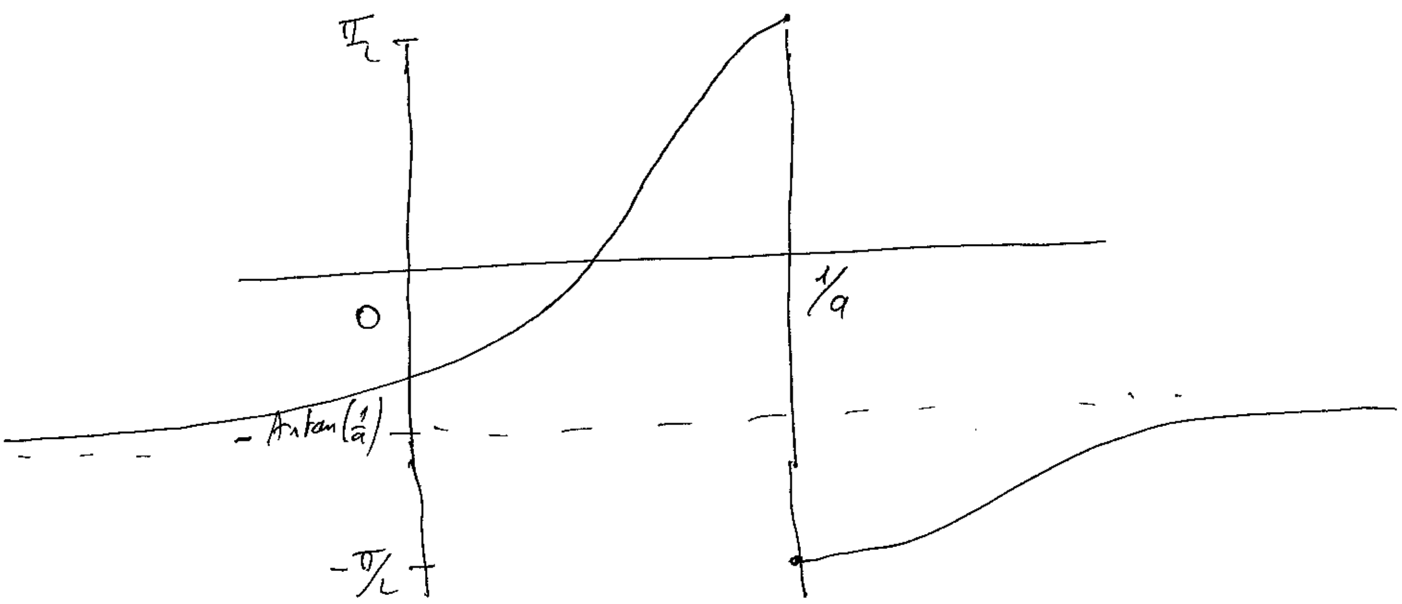
c) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{a}^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{a}^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

On peut faire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$1/a$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f	$-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} \ \Vert \ -\pi/2$	$\nearrow$	$-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$

D'où le graphe de f (on suppose que $a>0$)



d) $\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x>\frac{1}{a}\quad f(x)=\text{Arctan}(x)+C$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$

donc $C=-\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{\pi}{2}$

donc $\forall x>\frac{1}{a}$, $f(x)=\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{\pi}{2}$

De même $\exists D\in\mathbb{R},\ \forall x<\frac{1}{a},\ f(x)=\text{Arctan}(x)+D$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Arctan}(x)=-\frac{\pi}{2}$. Donc

on a $D=-\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)+\pi/2$.

Donc $\forall x<\frac{1}{a}$, $f(x)=\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)+\frac{\pi}{2}$.

e) $\underline{1^{\text{ier}}\text{ cas}}$: $a>0$

alors $\forall x<\frac{1}{a}$, $f(x)=\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(a)$ d'après la question 1)a). Si on pose $x=b$, on obtient l'égalité demandée avec $ab<1$.

2^{ieme} cas : $a<0$.

Alors $\forall x > \frac{1}{a}$, $f(x) = \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(\frac{1}{a}) - \frac{\pi}{2}$

Si on utilise la question 1) b) on a $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(a)$.

Si $b = x > \frac{1}{a}$ on a la formule demandée. On remarque

que dans ce cas, $b > \frac{1}{a} \iff ab < 1$ (car ici $a<0$).

Exo 2 1) a) On a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\},$
$\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}$
$\{a,b,c,d\}\}$.

b) La fonction g n'est pas surjective car $g^{-1}(\{a,b,c,d\}) = \emptyset$.

g n'est pas injective. En effet $g(\{a,c\}) = g(\{a,d\}) = \{a\}$.

c). Pour les mêmes raisons, f n'est pas surjective.

$f^{-1}\{E \times E\} = \emptyset$.

- f n'est pas injective car $f(\{a\}) = f(\{a,d\}) = (\{a\},\{a\})$.

2) a) Montrons que g est injective ssi $A = E$.

. Si $A = E$ alors $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $g(X) = X$ ainsi il est évident

que g est injective.

. Si maintenant $A \neq E$. Alors $\exists b \in E / A$ alors

$g(A) = A = g(A \cup \{b\})$ donc g n'est pas injective.

b) Montrons que g est surjective ssi $A = E$.

. Si $A = E$, alors $\forall X \in \mathcal{P}(X)$, $g(X) = X \cap E = X$. Donc g est

surjective.

- Si $A \neq E$, $\exists b \in E \setminus A$. On remarque alors que $g^{-1}(\{b\}) = \phi$,

ainsi g n'est pas surjective.

On a donc démontré l'équivalence.

c) - On suppose que $A \cup B = E$.

Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $f(X) = f(Y)$.

alors on a $\begin{cases} X \cap A = \cancel{Y} \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$

Mais $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$
$= (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$
$= Y \cap (A \cup B) = Y$

donc f est injective.

- Si maintenant $A \cup B \neq E$ alors $\exists b \in E \setminus (A \cup B)$.

Posons $X = A \cup B \cup \{b\}$ et $Y = A \cup B$ alors $f(X) = f(Y) = (A, B)$

donc f n'est pas injective.

$\boxed{\text{exo } 3}$ 1) a) On montre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$

l'énoncé $\mathcal{P}(n)$: " $u_n > 0$ ".

- Pour $n = 0$, puisque $u_0 > 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.
- On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$. On sait que $u_{n+1} = \dfrac{a u_n + 1}{u_n + a}$. Puisque $u_n > 0$ d'après $\mathcal{P}(n)$ alors $u_{n+1} > 0$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) $A = \{ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ \dfrac{a\alpha + 1}{\alpha + a} = \alpha \}$.

On montre facilement que $A = \{-1, 1\}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$= \frac{\frac{a u_n + 1}{u_n + a} - 1}{\frac{a u_n + 1}{u_n + a} + 1} = \frac{a-1}{a+1} w_n .$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{a-1}{a+1}$.

d) Si $a = 2$ alors (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n w_0$ mais $w_0 = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_n = 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1$.

2) a) De la même façon que la question 1) a) on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

b) On a $A = \{0\}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{b}$

donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{b}$.

d) Pour l'exemple, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n + w_0$.

Mais $w_0 = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n+1$ et $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.