Devoir n° 2

PROBLÈME CCP DU 15 OCTOBRE 2014

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1.

1. Questions préliminaires
   (a) En dérivant l'expression, montrer que pour tout $x > 0$, $Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
   (b) Par la même méthode, déduire une formule similaire pour tout $x < 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. Soit la fonction définie par $f(x) = Arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ de f.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = Artan'(x)$.
   (c) Etudier les limites de f au bord de $\mathcal{D}_f$ et faire une représentation graphique de f.
   (d) En déduire une expression simple de f.
   (e) En déduire la formule suivante : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $ab < 1$,
   $$Arctan(\frac{a+b}{1-ab}) = Arctan(a) + Arctan(b),$$
   on fera attention aux intervalles.

Exercice 2. Soit E un ensemble, on rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit les fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cap A \end{array}$$

1. Etude d'un cas particulier : on suppose que $E = \{a,b,c,d\}$, $A = \{a,b\}$ et $B = \{a,c\}$.
   (a) Donner $\mathcal{P}(E)$.
   (b) Dire si la fonction g est injective ou bien surjective.
   (c) Dire si la fonction f est injective ou bien surjective.

2. Etude du cas général : E est maintenant un ensemble quelconque.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que g soit injective.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que g soit surjective.

   (c) Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.

Exercice 3. Suite homographique. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On suppose que $ad - bc \neq 0$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}/\{-d/c\}$,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}/\{-d/c\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit A l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire $A = \{x \in \mathbb{R}/\{-d/c\},\ f(x) = x\}$.

1. Soit $a > 1$. On suppose que

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x + a},$$

   et que $u_0 > 0$.

   (a) Sachant que $u_0 > 0$, montrer que la suite vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   (b) Montrer que A admet 2 éléments α et β que l'on déterminera.

   (c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta},$$

   est une suite géométrique. C'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (indépendant de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \gamma w_n$.

   (d) On suppose que $a = 2$ et que $u_0 = 1$. En déduire une expression simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $b > 0$. On suppose maintenant que

$$f(x) = \frac{bx}{x + b}$$

   et que $u_0 > 0$.

   (a) Sachant que $u_0 > 0$, montrer que la suite vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   (b) Montrer que A admet qu'un élément α que l'on déterminera.

   (c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{u_n - \alpha},$$

   est une suite arithmétique. C'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (indépendant de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + \gamma$.

   (d) On suppose que $b = 1$ et que $u_0 = 1$. En déduire une expression simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.