Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (parcours prépa.)
Année 2014–2015

Applications linéaires

Les applications linéaires et leur omniprésence en mathématiques sont la raison pour laquelle on a introduit les espaces vectoriels – ce qui est intéressant, ce ne sont pas les objets mais les relations entre les objets, c'est-à-dire les applications qui en préservent la structures, les *morphismes.*

Dans tout le chapitre, on fixe un corps $\mathbb{K}$ et deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$.

I Généralités

1° Définition et exemples

a) Ce que c'est

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $\varphi : E \to F$ une application. On dit que φ est *linéaire* ou que c'est un *morphisme d'espaces vectoriels* si, pour tous vecteurs $u, u' \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(u + u') = \varphi(u) + \varphi(u') \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u).$$

Lorsque $E = F$, on dit que φ est un *endomorphisme.*
Lorsque φ est bijective, on dit que φ est un *isomorphisme.*
Lorsque $E = F$ et φ est bijective, on dit que φ est un *automorphisme.*

À l'instar du « test du sous-espace », on peut vérifier la linéarité en une seule identité.

Lemme. *Soit $\varphi : E \to F$ une application. Alors φ est linéaire si et seulement si pour tous vecteurs $u, u' \in E$ et tous scalaires $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$,*

$$\varphi(\lambda u + \lambda' u') = \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u').$$

Démonstration. Supposons que φ soit linéaire et soient $u, u' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On obtient en deux temps évidents : $\varphi(\lambda u + \lambda' u') = \varphi(\lambda u) + \varphi(\lambda' u') = \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u')$.
Réciproquement, supposons la condition du lemme remplie. En prenant $\lambda = \lambda' = 1$, on obtient l'additivité : $\varphi(u + u') = \varphi(u) + \varphi(u')$ et en prenant $\lambda' = 0$, on obtient la compatibilité au produit : $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$. □

Voici une autre propriété formelle facile à vérifier.

Lemme. *Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors $\varphi^{-1} : F \to E$ est linéaire.*

Démonstration. Soient $v, v' \in F$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On note $u = \varphi^{-1}(v)$, $u' = \varphi^{-1}(v')$. Par linéarité de φ, on a : $\varphi(\lambda u + \lambda' u') = \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u') = \lambda v + \lambda' v'$ donc, en utilisant la définition de u et u' et en appliquant φ^{-1}, il vient : $\lambda\varphi^{-1}(v) + \lambda'\varphi^{-1}(v') = \lambda u + \lambda' u' = \varphi^{-1}(\lambda v + \lambda' v')$. □

Exemples.
1. L'application nulle $\tilde{0} : E \to F$, $u \mapsto \overrightarrow{0}$ est linéaire.
2. Si $E = F$, l'identité $\mathrm{Id}_E : E \to E$, $u \mapsto u$ est linéaire.

3. Si $E = F = \mathbb{R}^2$, on retrouve la notion rencontrée en S1. (Ouf !) On connaît leur forme, retrouvons-la. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire. On pose $\varphi\binom{1}{0} = \binom{a}{c}$ et $\varphi\binom{0}{1} = \binom{b}{d}$. Alors, pour tout $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \varphi\left(x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x_1\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}.$$

4. Si $E = \mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{K}$, et si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est fixé, on définit (vérifier !) une application linéaire sur E en posant :

$$\ell(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

5. Les applications habituelles en analyse : limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$, évaluation en un point $f \mapsto f(2)$ ou ou plus généralement $f \mapsto f(x_0)$, dérivation d'une fonction en un point $f \mapsto f'(2)$ ou plus généralement $f \mapsto f'(x_0)$, dérivation d'une fonction $f \mapsto f'$, intégrale $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, etc., sont linéaires

b) Un exemple très général

L'exemple qui suit a une portée plus générale, d'ailleurs le chapitre sur les matrices consiste en premier lieu à montrer que tout s'y ramène.

Exemple (« des systèmes linéaires »). Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^m$ pour $n, m \in \mathbb{N}$. Fixons une « matrice » $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m}$, on définit une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ en posant :

$$\varphi_A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n\\a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\end{pmatrix}.$$

Remarquer l'inversion de l'ordre alphabétique : la matrice est de taille $m \times n$ mais l'application va de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^m$. Remarquer également que résoudre un système linéaire de m équations à n inconnues, c'est chercher un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi_A(X) = B$, où $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$ sont donnés : c'est donc chercher le ou les antécédents de B par φ_A.

2° Opérations linéaires

Notation. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition. Soient $\varphi, \varphi' \in \mathscr{L}(E, F)$. On définit leur somme $\varphi + \varphi'$ par :

$$\varphi + \varphi' : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \varphi(u) + \varphi'(u) \end{array}$$

et le produit d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par φ par :

$$\lambda\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \lambda\varphi(u). \end{array}$$

Autrement dit, on a : $(\varphi + \varphi')(u) = \varphi(u) + \varphi'(u)$ et $(\lambda\varphi)(u) = \lambda\,\varphi(u)$ pour tout u.

Lemme. *La somme et le produit par un scalaire sont bien définies et font de $\mathscr{L}(E, F)$ un espace vectoriel. (Le vecteur nul est l'application linéaire nulle $\tilde{0}$ définie plus haut.)*

Démonstration. La première partie du lemme signifie qu'avec les notations de la définition, $\varphi+\varphi'$ et $\lambda\varphi$ sont linéaires. En effet, pour $u, u' \in E$ et $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}(\varphi+\varphi')(\mu u+\mu' u') &= \varphi(\mu u+\mu' u')+\varphi'(\mu u+\mu' u') = \mu\varphi(u)+\mu'\varphi(u')+\mu\varphi'(u)+\mu'\varphi'(u')\\ &= \mu\varphi(u)+\mu\varphi'(u)+\mu'\varphi'(u)+\mu'\varphi'(u) = \mu(\varphi+\varphi')(u)+\mu'(\varphi+\varphi')(u')\\ (\lambda\varphi)(\mu u+\mu' u') &= \lambda\big[\varphi(\mu u+\mu' u')\big] = \lambda\big[\mu\varphi(u)+\mu'\varphi(u')\big]\\ &= \mu\lambda\varphi(u)+\mu\lambda'\varphi(u') = \mu(\lambda\varphi)(u)+\mu'(\lambda\varphi)(u').\end{aligned}$$

□

Remarque. Ah, un espace vectoriel. Et sa dimension alors ? Réponse au chapitre suivant...

3° Composition

Proposition. *La composée de deux applications linéaires est linéaire.*

Démonstration. Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$. On veut montrer que $\psi\circ\varphi$ est linéaire. Soient $u, u' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, on a :

$$\psi\circ\varphi(\lambda u+\lambda' u') = \psi\big(\varphi(\lambda u+\lambda' u')\big) = \psi\big(\lambda\varphi(u)+\lambda'\varphi(u')\big) = \lambda\psi(\varphi(u))+\lambda'\psi(\varphi(u')),$$

ce qui montre que $\psi\circ\varphi$ est linéaire. □

On peut ajouter des propriétés de distributivité utiles – preuve laissée en exercice.

Proposition. *Soient $\varphi, \varphi' \in \mathscr{L}(E,F)$, $\psi, \psi' \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\psi\circ(\lambda\varphi+\lambda'\varphi') = \lambda\psi\circ\varphi+\lambda'\psi\circ\varphi' \text{ et } (\lambda\psi+\lambda'\psi')\circ\varphi = \lambda\psi\circ\varphi+\lambda'\psi'\circ\varphi.$$

NOTATION. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires de E dans E.

Corollaire. *L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ est aussi un anneau unitaire (le produit est la composition, le neutre du produit est l'identité Id_E).*

Démonstration. Les propriétés demandées la somme sont contenues dans la structure d'espace vectoriel. La composition des applications, qu'elles soient linéaire ou pas, est une propriété générale, de même que le fait que l'identité soit neutre ($\varphi\circ\mathrm{Id}_E = \varphi = \mathrm{Id}_E\circ\varphi$ pour tout $\varphi : E \to E$). La distributivité a déjà été vue. □

Remarque. Dès que la dimension de E est supérieure ou égale à 2, l'anneau $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif. Donnons un exemple avec $E = \mathbb{K}^2$. On pose, pour $\binom{x}{y} \in \mathbb{K}^2$:

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix} \text{ et } \psi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}, \text{ ce qui donne : } \varphi\circ\psi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \text{ et } \psi\circ\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}.$$

Remarque. En plus de la structure d'anneau, on a une structure d'espace vectoriel et une relation de compatibilité supplémentaire entre la multiplication d'un scalaire par une application linéaire et la composition. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$(\lambda\psi)\circ\varphi = \lambda(\psi\circ\varphi).$$

On résume toutes ces propriétés en disant que $\mathscr{L}(E)$ est une *algèbre* (associative unitaire). On en connaît au moins une autre : l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est également une algèbre.

II Sous-espaces associés à une application linéaire

1° Image

a) Ce que c'est

Définition. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *image* de φ l'ensemble

$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(E) = \big\{v \in F,\ \exists u \in E,\ v = \varphi(u)\big\} = \big\{\varphi(u),\ u \in E\big\}.$$

Lemme. *L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et soient $v, v' \in \operatorname{Im}\varphi$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Par définition de l'image de φ, il existe $u, u' \in E$ tels que $\varphi(u) = v$ et $\varphi(u') = v'$. On peut alors calculer, par linéarité : $\lambda v + \lambda' v' = \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u') = \varphi(\lambda u + \lambda' u') \in \operatorname{Im}\varphi$. □

Définition. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. On appelle *rang* de φ et on note $\operatorname{rg}(\varphi)$ la dimension de l'image de φ :

$$\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi.$$

b) Critère inutile de surjectivité

Proposition. *Soit* $\varphi \in Ł(E,F)$. *Alors,* φ *est surjective SSI* $\operatorname{Im}\varphi = E$.

Démonstration. C'est évident. □

c) Application aux systèmes

Reprenons les notations de I1°b) et revenons au système $\varphi_A(X) = B$. Par définition de l'image, l'existence d'une solution $X \in \mathbb{K}^n$ à ce système équivaut à la propriété : $B \in \operatorname{Im}(\varphi)$.

2° Noyau

a) Ce que c'est

Définition. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *noyau* de φ et on note $\operatorname{Ker}(\varphi)$ l'ensemble

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in E,\ \varphi(u) = \overrightarrow{0}\} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{0}).$$

Lemme. *Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. D'abord, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ n'est pas vide puisque $\varphi(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Ensuite, soient $u, u' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On a :

$$\varphi(\lambda u + \lambda' u') = \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u') = \lambda\overrightarrow{0} + \lambda'\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0},$$

si bien que $\lambda u + \lambda' u' \in \operatorname{Ker}\varphi$. □

b) Critère d'injectivité (à savoir par cœur)

Proposition. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. *Alors* φ *est injective SSI* $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$.

Démonstration (à connaître). Supposons que φ soit injective. L'inclusion $\{\overrightarrow{0}\} \subset \operatorname{Ker}\varphi$ va se soi. Inversement, soit $u \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a donc : $\varphi(u) = \overrightarrow{0} = \varphi(\overrightarrow{0})$. Par injectivité de φ, on en déduit : $u = \overrightarrow{0}$. D'où l'égalité $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$. Soient $u, u' \in E$ tels que $\varphi(u) = \varphi(u')$. Par linéarité, on a : $\varphi(u - u') = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire que $u - u' \in \operatorname{Ker}\varphi$. Cela signifie que $u - u' \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$, c'est-à-dire que $u = u'$. □

Mise en garde. *Toutes les applications que l'on rencontre dans sa vie ne sont pas linéaires : ce critère n'a* aucun sens *pour des applications qui ne seraient pas linéaires (ou, plus généralement, des morphismes de groupes, structure que l'on n'étudie pas cette année).*

c) Application aux systèmes

Reprenons les notations de I1°b) et revenons au système $\varphi_A(X) = B$. Supposons que B appartienne à l'image de φ_A, c'est-à-dire que ce système ait une solution X_1. Alors, pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\varphi_A(X) = B \iff \varphi_A(X) = \varphi_A(X_1) \iff \varphi_A(X - X_1) = \overrightarrow{0} \iff X - X_1 \in \operatorname{Ker} \varphi_A.$$

Ainsi, X est solution du système SSI $X - X_1 \in \operatorname{Ker} \varphi$ SSI $X = X_1 + (X - X_1)$ peut s'écrire comme somme de la solution particulière X_1 et d'une solution du système « homogène » associé $\varphi_A(X) = \overrightarrow{0}$ (où on a remplacé le second membre quelconque B par $\overrightarrow{0}$).
C'est la même situation que pour les équations différentielles linéaires :

SGEASM = SPEASM + SGESSM

(solution générale de l'équation avec second membre = solution particulière de l'équation avec second membre + solution générale de l'équation sans second membre).

En ce sens, le noyau de φ_A contrôle l'unicité de la solution du système : si $\operatorname{Ker} \varphi_A$ est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, le système possède au plus une solution ; sinon, il en a plusieurs (généralement une infinité pour peu que $\mathbb{K}$ soit infini). Remarquer que ceci ne dépend pas de B.

3° Injectivité, surjectivité et familles

Ce paragraphe un peu formel sera utile pour le théorème principal du chapitre. L'image d'une famille $(u_1, \dots, u_k)$ par une application linéaire φ est la famille $\big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)\big)$.

Proposition. (i) *Une application linéaire est injective SSI l'image de toute famille libre est libre.*

(ii) *Une application linéaire est surjective SSI l'image de toute famille génératrice est génératrice.*

(iii) *Une application linéaire est injective SSI l'image de toute base est une base.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.
(i) Supposons que φ soit injective et soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille libre. On veut montrer que $\big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)\big)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(u_i) = \overrightarrow{0}$. Alors, par linéarité : $\varphi\big(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \overrightarrow{0}$. Par injectivité, cela donne : $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \overrightarrow{0}$. Puis, par indépendance linéaire de $\mathbf{u}$, il vient : $\lambda_i = 0$ pour tout i.
Réciproquement, supposons que l'image de toute famille libre soit libre. Soit u un vecteur non nul : la famille à un vecteur (u) est libre, de même que son image $\big(\varphi(u)\big)$. D'où $\varphi(u) \neq \overrightarrow{0}$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \varphi \subset \{\overrightarrow{0}\}$ (on vient de prouver l'inclusion des complémentaires) et φ est injective.
(ii) Supposons que φ soit surjective et soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille génératrice. On veut montrer que $\big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)\big)$ est génératrice. Soit $v \in F$. Par surjectivité, v possède un antécédent u. Comme $\mathbf{u}$ est génératrice, on peut trouver $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$. Par linéarité, il vient : $v = \varphi(u) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(u_i)$, ce qui prouve l'assertion.
(iii) Cela résulte de (i) et (ii). □

III Théorème du rang

Le théorème du rang joue le même rôle que le théorème de la base incomplète adjoint au théorème de la dimension pour les applications linéaires : il en décrit complètement la structure. De plus, il permet de prévoir la taille de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Plus prosaïquement, il est utilisé dans tous les contrôles...

1° ≪ **Version abstraite** ≫

La version abstraite n'est ici qu'une étape pour la formule du rang du paragraphe suivant.

Théorème. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. *Soit* E' *un supplémentaire du noyau de* φ *dans* E. *Alors* φ *induit par restriction un isomorphisme* $\varphi' : E' \to \operatorname{Im}\varphi,\ u \mapsto \varphi(u)$.

Démonstration. L'application φ' est bien définie : en effet, tout vecteur de la forme $\varphi(u)$ avec $u \in E'$ appartient bien à l'image de φ. D'après les critères précédents, il s'agit montrer que $\operatorname{Ker}\varphi' = \{\overrightarrow{0}\}$ et que $\operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Im}\varphi$.
Pour la première relation, remarquons qu'un élément du noyau de φ' est un élément u de E' tel que $\varphi'(u) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\varphi(u) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. Autrement dit : $\operatorname{Ker}\varphi' = E' \cap \operatorname{Ker}\varphi$, intersection réduite à $\{\overrightarrow{0}\}$ par hypothèse.
La deuxième relation n'est pas très difficile. Soit $v \in \operatorname{Im}\varphi$. Il existe $u \in E$ tel que $v = \varphi(u)$. Le problème, c'est qu'*a priori*, le vecteur u n'appartient pas à E'. En revanche, comme $E = E' + \operatorname{Ker}\varphi$, il s'écrit comme somme d'un vecteur u' de E' et d'un vecteur u_0 de $\operatorname{Ker}\varphi$. De la relation $u = u' + u_0$ on tire : $v = \varphi(u) = \varphi(u') + \varphi(u_0) = \varphi'(u')$, ce qui montre que $v \in \operatorname{Im}\varphi'$. □

2° **Formule du rang (à savoir par cœur)**

Théorème. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, *où* E *est un espace de dimension finie. Alors :*

$$\operatorname{rg}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E.$$

Démonstration. Appliquons la version abstraite du théorème du rang. Soit donc E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans E. On a en particulier : $\dim(E') + \dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim E$. Il suffit donc de démontrer que $\dim E' = \operatorname{rg}\varphi$. Or, d'après le théorème, φ induit un isomorphisme $\varphi' \in \mathscr{L}(E', \operatorname{Im}\varphi)$. D'après la proposition II3°, l'image d'une base de E' par φ' est une base de $\operatorname{Im}\varphi$, si bien que $\dim(E') = \operatorname{rg}(\varphi)$. □

3° **Critère de bijectivité**

Proposition. *Soient* E *et* F *deux espaces* de même dimension *(finie) :* $\dim E = \dim F$. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. *Alors* φ *est injective SSI* φ *est surjective SSI* φ *est bijective.*

Remarque. Cette proposition résonne avec une propriété connue des ensembles finis : pour $f : X \to Y$ une application entre ensembles finis de même cardinal, f est injective SSI f est surjective SSI f est bijective.
Par ailleurs, compte tenu de la formule du rang ou de la proposition II3°, pour qu'il existe une bijection entre deux espaces, il est nécessaire qu'ils aient la même dimension. L'hypothèse de cette proposition n'est donc pas restrictive.

Démonstration. Il suffit de montrer que φ est injective SSI φ est surjective (pourquoi ?). Or, d'une part, φ est injective SSI $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$; d'autre part, φ est surjective SSI $\operatorname{rg}\varphi = \dim F$ SSI $\dim E - \operatorname{rg}\varphi = 0$. Comme d'après la formule du rang, on a égalité des deux entiers, $\dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim E - \operatorname{rg}\varphi$, on voit que la nullité de l'un équivaut à la nullité de l'autre. □

4° **Application aux systèmes linéaires**

Si on considère le cas des systèmes, le résultat devient frappant. Reprenons les notations de I1°b) et revenons au système $\varphi_A(X) = B$. On suppose qu'il y a autant d'inconnues que d'équations, *i.e.* que la matrice est carrée, *i.e.* que $m = n$. Alors :

— le système $\varphi_A(X) = B$ admet au plus une solution SSI il admet au moins une solution ;
— ceci est indépendant de B.

Étonnant, non ? (Pas tant que ça si on se rappelle que la propriété est connue lorsque $m = n = 1$ et $m = n = 2$ et si on croit que l'algèbre en dimension 2 est « typique ».)
On peut récapituler les renseignements sur le système $\varphi_A(X) = B$:
- il admet au moins une solution SSI $B \in \operatorname{Im} \varphi_A$;
- si c'est le cas, et si X_1 est une solution particulière, alors l'ensemble des solutions $\varphi^{-1}(B)$ est paramétré par le noyau de φ_A : cela signifie que l'application $\operatorname{Ker} \varphi_A \to \varphi^{-1}(B)$, $X_0 \mapsto X_1 + X_0$ est une bijection [1]
- par le théorème du rang, ledit noyau a pour dimension $n-r$, où $n = \dim(E)$ et $r = \operatorname{rg}(\varphi_A)$ est le rang du système (assez facile à calculer en pratique).

Remarque. En général, quand on ajoute une équation, le rang r du système augmente de 1 et on perd une dimension dans l'espace (affine) des solutions. Ainsi, une équation dans le plan définit en général une droite ; une équation dans l'espace définit en général un plan, deux équations une droite, trois équations un point.

IV Construction d'applications linéaires

1° Par restriction à des sous-espaces supplémentaires

a) Cas général

Proposition. *Soient E_1 et E_2 deux supplémentaires dans E. Soient $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\varphi|_{E_1} = \varphi_1$ et $\varphi|_{E_2} = \varphi_2$.*

Démonstration. Prouvons l'unicité de φ. Pour cela, supposons qu'il existe une telle application. Soit $u \in E$. Il existe $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ unique tel que $u = u_1 + u_2$. On a donc :

$$\varphi(u) = \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi_1(u_1) + \varphi_2(u_2) :$$

cela montre que sous réserve d'existence, φ est parfaitement déterminée par les données, c'est-à-dire unique.
Prouvons que l'application définie par la formule précédénte – c'est-à-dire $\varphi(u) = \varphi_1(u_1) + \varphi_2(u_2)$ pour $u = u_1 + u_2$ avec $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ – est linéaire. Soient $u, u' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On décompose $u = u_1 + u_2$ et $u' = u'_1 + u'_2$ avec $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2) \in E_1 \times E_2$. On a alors :

$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(u_1 + u_2) + \lambda'(u'_1 + u'_2) = \underbrace{\lambda u_1 + \lambda' u'_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \lambda' u'_2}_{\in E_2},$$

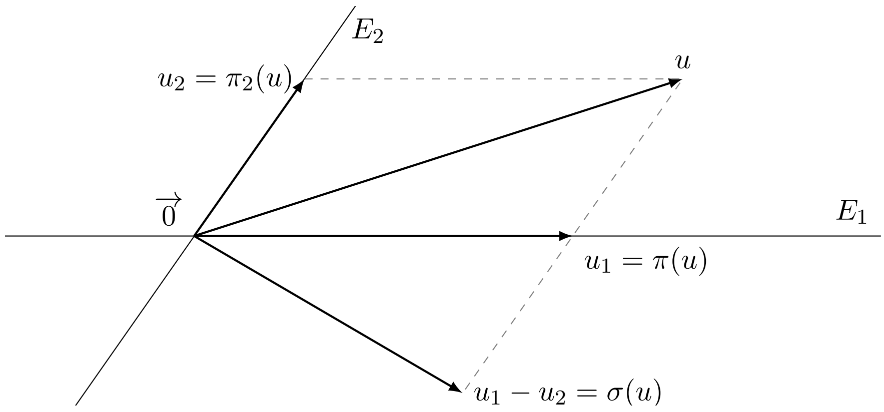
de sorte que

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda u + \lambda' u') &= \varphi_1(\lambda u_1 + \lambda' u'_1) + \varphi_2(\lambda u_2 + \lambda' u'_2) \\
&= \lambda \varphi_1(u_1) + \lambda' \varphi_1(u'_1) + \lambda \varphi_2(u_2) + \lambda' \varphi_2(u'_2) \\
&= \lambda\big(\varphi_1(u_1) + \varphi_2(u_2)\big) + \lambda'\big(\varphi_1(u'_1) + \varphi_2(u'_2)\big) \\
&= \lambda \varphi(u) + \lambda' \varphi(u').
\end{aligned}$$

□

b) Projecteurs et symétries

Définition. Soient E_1 et E_2 deux supplémentaires dans E. On appelle *projection* sur E_1 parallèlement à E_2 (resp. *symétrie* par rapport à E_1 parallèlement à E_2) l'application π (resp. σ) définie ainsi. Étant donné un vecteur $u \in E$, on l'écrit sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$. L'image de u par la projection π est $\pi(u) = u_1$ (resp. $\sigma(u) = u_1 - u_2$).



Lemme (Notations de la définition). *Les applications π et σ sont linéaires et on a : $\sigma = 2\pi - \mathrm{Id}_E$.*

Démonstration. La linéarité résulte de la proposition précédente à $\pi : E_1 \to E$, $u_1 \mapsto u_1$ et $\pi_2 : E_2 \to E$, $u_2 \mapsto \overrightarrow{0}$ (resp. $\sigma_1 : E_1 \to E$, $u_1 \mapsto u_1$ et $\sigma_2 : E_2 \to E$, $u_2 \mapsto -u_2$). (On pourra écrire une preuve spéciale.)
Pour prouver la relation $\sigma - 2\pi + \mathrm{Id}_E = \tilde{0}$, on remarque que pour $u_1 \in E_1$, on a : $(\sigma - 2\pi + \mathrm{Id}_E)(u_1) = u_1 - 2u_1 + u_1 = \overrightarrow{0}$ et pour $u_2 \in E_2$, on a : $(\sigma - 2\pi + \mathrm{Id}_E)(u_2) = -u_2 - \overrightarrow{0} + u_2 = \overrightarrow{0}$. Par unicité dans la proposition, l'application nulle $\tilde{0}$ est l'unique application linéaire dont la restriction à E_1 et E_2 est l'application nulle : d'où $\sigma - 2\pi + \mathrm{Id}_E = \tilde{0}$.
(Plus simplement, on a : $\sigma(u) = u_1 - u_2$ et $2\pi(u) - u = 2u_1 - (u_1 + u_2) = u_1 - u_2$ pour tout u.) □

2° Par l'image d'une base

Ce paragraphe montre que pour connaître une application linéaire, il n'est pas nécessaire de retenir l'image de tous les vecteurs : il suffit de connaître l'image d'une base. Cela fait qu'il est facile de coder une application linéaire, par exemple dans un ordinateur.

Proposition. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille quelconque de F. Il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\varphi(e_i) = v_i$ pour tout i.*

Démonstration. Commençons par l'unicité en admettant l'existence de φ. Soit $u \in E$ et soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ l'unique famille de scalaires telle que $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a par linéarité :

$$\varphi(u) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i,$$

de sorte que $\varphi(u)$ est parfaitement déterminé par les données.
Pour l'existence, montrons que l'application définie par la formule précédente est linéaire. Soit $u' \in E$, (x'_i) tel que $u' = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$ et soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i + \lambda' \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \lambda' x'_i) e_i,$$

d'où :

$$\varphi(\lambda u + \lambda' u') = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \lambda' x'_i) v_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i v_i + \lambda' \sum_{i=1}^n x'_i v_i = \lambda \varphi(u) + \lambda' \varphi(u'),$$

ce qui prouve la linéarité de φ. □

1. Attention, ce n'est pas une bijection linéaire parce que $\varphi^{-1}(B)$ n'est pas un espace vectoriel si $B \neq \overrightarrow{0}$.