Algèbre linéaire

Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (parcours prépa.)
Année 2014–2015

I Généralités

1° Motivation

a) De la linéarité partout

Lycéen, on rencontre des vecteurs en mathématiques et... on n'en fait plus grand-chose. Ils pourraient servir en physique pour décrire des concepts comme la force, la vitesse, l'accélération, le moment cinétique, etc., mais ce n'est plus guère le cas. On peut au moins retenir des règles de calcul agréables : la règle de Chasles, la distributivité du produit d'un scalaire par un vecteur sur la somme des vecteurs et quelques autres.
Grand pas dans l'abstraction : ce qu'on va appeler *espace vectoriel*, c'est n'importe quel ensemble dans lequel on peut calculer « comme avec les vecteurs du lycée ».
Malgré les apparences, quoi que l'on fasse en mathématiques – algèbre, analyse, géométrie, probabilités ou autre – les espaces vectoriels sont des objets aussi basique, presque aussi fréquents que les ensembles. On voit de la *linéarité* partout :

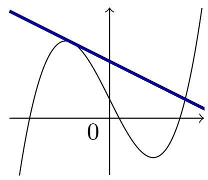
— théorie abstraite pour les (des) sytèmes linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

— géométrie ;

— les opérations de base de l'analyse respectent les sommes et le produit par une constante :

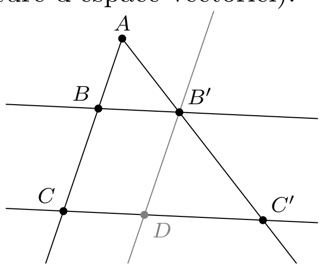
$$\lim_{n\to+\infty} u_n, \quad \lim_{x\to x_0} f(x), \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \quad f'(x)...$$

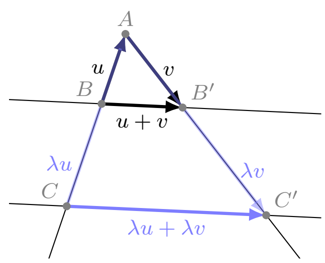


— le maître mot, dans un problème compliqué, est souvent de *linéariser* le problème : l'approximer par un problème linéaire que l'on sait résoudre et voir comment revenir au problème initial.

b) Thalès et la distributivité

Dans ce petit paragraphe, on montre comment le théorème de Thalès, connu dans la géométrie élémentaire (mais comment le démontrer, au fait ?), peut s'interpréter en termes *structurels* (*i.e.* de la structure d'espace vectoriel).





Deux applications du théorème de Thalès donnent successivement :

$$\lambda = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}}$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\lambda\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AB'},$$

c'est-à-dire, en nommant $u = \overrightarrow{BA}$ et $v = \overrightarrow{AC}$:

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Autrement dit, supposant connues les propriétés de base de la somme des vecteurs [1] et la définition du produit par un scalaire, on montre grâce au théorème de Thalès que la distributivité du produit sur la somme de vecteurs.

2° Rappel : corps

On a déjà vu ce qu'est un corps dans le chapitre sur les nombres complexes, puis dans le chapitre sur les fractions rationnelles. Rappelons-le encore une fois.

Définition. On appelle *corps* un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux opérations, l'une appelée *somme* et notée $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, l'autre appelée *produit* et notée $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, tels que :

(i) pour tout $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$, on a : $(\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$; on dit que la somme est *associative* ;

(ii) il existe un élément appelé *zéro* ou *neutre de la somme* et noté $0 \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on ait : $\lambda + 0 = \lambda = 0 + \lambda$;

(iii) pour tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe un élément $\lambda' \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda + \lambda' = 0 = \lambda' + \lambda$; cet élément est alors unique [2], on l'appelle *opposé* de λ et on le note $-\lambda$;

(iv) pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a : $\lambda + \mu = \mu + \lambda$; on dit que la somme est *commutative* ;

(v) pour tout $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$, on a : $(\lambda \cdot \mu) \cdot \nu = \lambda \cdot (\mu \cdot \nu)$; on dit que le produit est *associatif* ;

(vi) il existe un élément appelé *unité* ou *neutre de la multiplication* et noté $1 \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on ait : $\lambda \cdot 1 = \lambda = 1 \cdot \lambda$;

(vii) pour tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe un élément $\lambda' \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \cdot \lambda' = 1 = \lambda' \cdot \lambda$; cet élément est alors unique [3], on l'appelle *inverse* de λ et on le note λ^{-1} ;

(viii) pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a : $\lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$; on dit que le produit est *commutatif* [4] ;

(ix) pour tout $(\lambda, \mu, \mu') \in \mathbb{K}^3$, on a : $\lambda \cdot (\mu + \mu') = \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \mu'$ et [5] $(\mu + \mu') \cdot \lambda = \mu \cdot \lambda + \mu' \cdot \lambda$; on dit que le produit est *distributif* sur la somme.

Exemples. Les corps les plus souvent utilisés sont le corps des réels $\mathbb{R}$ et le corps des complexes $\mathbb{C}$, mais on peut aussi avoir en tête le corps des rationnels [6] $\mathbb{Q}$ et le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$, ainsi que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, -1\}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

---

1. On définit les vecteurs grâce aux parallélogrammes ($\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ si $MNQP$ est un parallélogramme, *i.e.* si $[MP]$ et $[NQ]$ ont le même milieu) et la somme de deux vecteurs grâce à la règle de Chasles, dont on montre la cohérence grâce au ≪ théorème des milieux ≫.
2. En effet, si λ' et λ'' conviennent, on a : $\lambda' = \lambda' + \lambda + \lambda'' = \lambda''$.
3. En effet, si λ' et λ'' conviennent, on a : $\lambda' = \lambda' \cdot \lambda \cdot \lambda'' = \lambda''$.
4. Cette condition peut être enlevée : on parle alors de *corps non commutatif* ou d'*algèbre à division*.
5. La condition qui vient est redondante lorsque le produit est commutatif ; on l'écrit néanmoins pour renforcer la ressemblance avec la définition d'espace vectoriel.
6. Rappelons qu'un rationnel est une fraction p/q où p et q sont des entiers, q n'étant pas nul.

On convient de ne pas écrire le point dans un produit, c'est-à-dire qu'une écriture de la forme $\lambda\mu$ signifie simplement $\lambda \cdot \mu$.

Lemme. *Dans un corps, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *on a :* $\lambda \cdot \mu = 0 \iff (\lambda = 0 \text{ ou } \mu = 0)$.

Démonstration. On montre d'abord que si $\mu = 0$, alors $\lambda\mu = 0$. En utilisant la distributivité d'une part, le fait que 0 est neutre d'autre part, on a : $\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0$. En retranchant membre à membre $\lambda \cdot 0$, il vient : $\lambda \cdot 0 = 0$. De même, si $\lambda = 0$, alors, $\lambda\mu = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lambda\mu = 0$. Montrer que $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, c'est montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $\mu = 0$. On suppose donc que $\lambda \neq 0$. En multipliant par l'inverse de λ, il vient par associativité : $0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}\lambda\mu = \mu$. □

Convention. *Dans tout le chapitre, on choisit un corps quelconque* $\mathbb{K}$ *appelé* corps de base*. Ses éléments sont appelés* scalaires*.*

3° Espaces vectoriels

a) Commençons par une définition bien abstraite.

Définition. Redisons que l'on a choisi un corps de base $\mathbb{K}$. Un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ est un ensemble E, dont on appelle *vecteurs* les éléments, muni de deux opérations, l'une appelée *somme* et notée $+ : E \times E \to E$, l'autre appelée *produit d'un scalaire par un vecteur* et notée $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, tels que :

(i) pour tout $(u, v, w) \in E^3$, on a : $(u + v) + w = u + (v + w)$; on dit que la somme est *associative* ;

(ii) il existe un vecteur appelé *vecteur nul* ou *neutre de la somme* et noté $\overrightarrow{0}$ ou 0 tel que pour tout $u \in E$, on ait : $u + \overrightarrow{0} = u = \overrightarrow{0} + u$;

(iii) pour tout élément $u \in E$, il existe un élément $u' \in E$ tel que $u + u' = 0 = u' + u$; cet élément est alors unique [7], on l'appelle *opposé* de u et on le note $-u$;

(iv) pour tout $(u, v) \in E^2$, on a : $u + v = v + u$; on dit que la somme est *commutative* ;

(v) pour tous $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(v, v') \in E^3$, on a : $\lambda \cdot (v + v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v'$ et $(\lambda + \lambda') \cdot u = \lambda \cdot u + \lambda' \cdot u$;

(vi) pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et tout $v \in E$, on a [8] : $\lambda \cdot (\lambda' \cdot v) = (\lambda\lambda') \cdot v$;

(vii) pour tout $v \in E$, on a : $1 \cdot u = u$.

b) Voyons que cette définition abstraite s'incarne en une multitude d'exemples pris dans les cours d'algèbre, de géométrie mais aussi d'analyse.

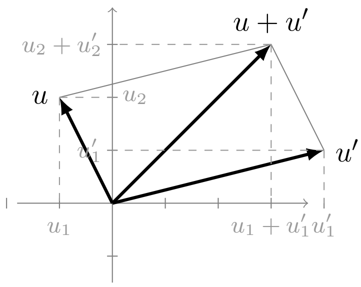
1. On fait de l'ensemble $\{\overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel en posant : $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ et $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Soit $E = \mathbb{K}$: on voit que les propriétés de la définition d'espace vectoriel sont satisfaites par définition de corps.
3. Soit $E = \mathbb{L}$ un corps qui contient $\mathbb{K}$. D'après les propriétés de $\mathbb{K}$, la somme de $\mathbb{L}$ et le produit d'un éléments de $\mathbb{K}$ par un élément de $\mathbb{L}$ font de $\mathbb{L}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
   Par exemple, on peut prendre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{C}$: on retrouve essentiellement le calcul vectoriel dans le plan.

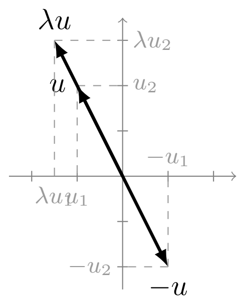
7. En effet, si u' et u'' conviennent, on a : $u' = u' + u + u'' = u''$.
8. Attention, dans cette formule, deux opérations coexistent : celle marquée d'un point est le produit « externe » d'un scalaire par un vecteur, celle sans point ($\lambda\lambda'$) est le produit « interne » dans $\mathbb{K}$.

Ce type d'exemple est l'objet de ce qu'on appelle la *théorie élémentaire des corps*. L'existence de la structure linéaire permet de montrer, par exemple, qu'il est impossible de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ – ce qu'on appelle la *duplication du cube*.

4. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}.$$

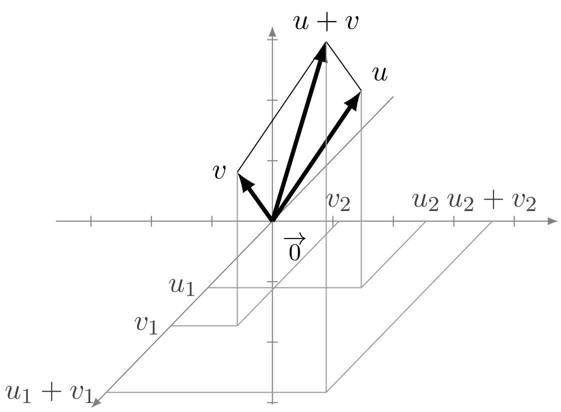




On a déjà rencontré cet espace vectoriel au premier semestre.

5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: si $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \text{ on pose : } u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}.$$



6. **L'exemple fondamental de $\mathbb{K}$-e.v.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, v = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$u + v = (u_i + v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \quad \text{et} \quad \lambda u = (\lambda u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

— $(u + v) + w = \big((u_i + v_i) + w_i\big)_i = \big(u_i + (v_i + w_i)\big)_i = u + (v + w)$;
— vecteur nul : $\overrightarrow{0} = (0)_i = (0, \ldots, 0)$;
— opposé : soit $-u = (-u_i)_i$, on a : $u + (-u) = (u_i - u_i)_i = \overrightarrow{0}$;
— $u + v = (u_i + v_i)_i = (v_i + u_i)_i = v + u$;
— $\lambda(v + v') = \lambda(v_i + v'_i) = \big(\lambda(v_i + v'_i)\big)_i = \big(\lambda v_i + \lambda v'_i\big) = \lambda v + \lambda v'$;
— $(\lambda + \lambda')v = \big((\lambda + \lambda')v_i\big)_i = (\lambda v_i + \lambda' v_i)_i = \lambda v + \lambda' v$;

— $\lambda(\lambda' v) = \lambda(\lambda' v_i)_i = (\lambda\lambda' v_i)_i = (\lambda\lambda')v$;
— $1v = v$.
C'est donc bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

7. On peut faire de même avec $\mathbb{K}$ quelconque au lieu de $\mathbb{R}$.
8. $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z, w \in \mathbb{C}$, on sait calculer $z + w$ et λz (somme et produit de deux complexes) ! Les axiomes sont satisfaits (exercice), c'est essentiellement une autre façon de parler de $\mathbb{R}^2$.
9. Polynômes : $E = \mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}$ quelconque : pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $Q = \sum_{\ell=0}^{e} b_\ell X^\ell \in \mathbb{K}[X]$, on pose :
$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(d,e)} (a_k + b_k) X^k, \quad \lambda P = \sum_{k=0}^{d} \lambda a_k X^k$$
(où $a_k = 0$ si $k > d$ et $b_\ell = 0$ si $\ell > e$).
10. Fractions rationnelles : $E = \mathbb{K}(X)$ sur $\mathbb{K}$ quelconque.
11. Fonctions : soit J un ensemble quelconque et soit $E = \mathbb{K}^J$ l'ensemble des fonctions de J dans $\mathbb{K}$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g : J \to \mathbb{K}$, on définit :
$$f + g : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda f : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x). \end{array}$$
(Autrement dit : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout x dans J.)

Sous-exemples :
— pour $J = \{1, \ldots, n\}$, on identifie : $\mathbb{K}^J = \mathbb{K}^n$;
— pour $J = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, on retrouve les matrices 2×2 à coefficients réels : la matrice représentée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est l'application $A : (1, 1) \mapsto a$, $(1, 2) \mapsto b$, $(2, 1) \mapsto c$, $(2, 2) \mapsto d$;
— pour $J = \mathbb{N}$, on retrouve les suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – ou complexes : $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$;
— pour J un intervalle, on retrouve (toutes) les fonctions de J dans $\mathbb{R}$.

c) Un exemple de calcul

Proposition. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, soient $u \in E$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors :*
$$\lambda u = \overrightarrow{0} \iff \big(\lambda = 0 \text{ ou } u = \overrightarrow{0}\big).$$

Démonstration. « $\Leftarrow$ » Si $\lambda = 0$ alors $0u + 0u = (0 + 0)u = 0u$ donc $0u = \overrightarrow{0}$.
Si $u = \overrightarrow{0}$ alors $\lambda\overrightarrow{0} + \lambda\overrightarrow{0} = \lambda(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda\overrightarrow{0}$ donc $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
« $\Rightarrow$ » Supposons que $\lambda u = \overrightarrow{0}$. Si $\lambda = 0$, rien à dire. Sinon :
$$u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$
□

4° Sous-espaces vectoriels

a) On commence par la définition...

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel (sous-e.v.)* de E si :

1. l'ensemble F n'est pas vide ;
2. pour tout $(u, v) \in F^2$, $u + v \in F$;
3. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in F$, $\lambda v \in F$.

Lemme. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et F un sous-espace vectoriel (sous-e.v.) de E. On a alors : $\overrightarrow{0} \in F$.*

b) Exemples

1. Pour *tout* espace vectoriel E :
   — l'ensemble $\{\overrightarrow{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
   — l'ensemble E est un sous-espace vectoriel E.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$: une droite D est-elle un sous-e.v. de E ?
   — Condition nécessaire : $\overrightarrow{0} \in D$.
   — Cette condition est suffisante (exercice).
3. Parabole : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$ est-elle un sous-espace vectoriel ? *Non !* (Pourquoi ?)
4. Réseau : $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ est-il un sous-espace vectoriel ? *Non !* (Pourquoi ?)
5. Exercice : les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{\overrightarrow{0}\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites contenant $\overrightarrow{0}$.
6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $F = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leqslant n\}$. C'est un sous-espace vectorielcar :

$$\begin{cases} \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q), \\ \deg(\lambda P) \leqslant \deg(P). \end{cases}$$

7. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ (u_n) \text{ converge}\}$: c'est un sous-espace vectoriel : si (u_n) et (v_n) convergent et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les suites $(u_n + v_n)$ et (λu_n) convergent.
8. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient F l'ensemble des fonctions continues et G l'ensemble des fonctions dérivables : ce sont des sous-espace vectoriel (pourquoi ?).
9. Soit $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$ et soit H l'ensemble des fonctions intégrables : c'est un sous-espace vectoriel (pourquoi ?).

c) « Test du sous-espace »

Proposition. *Soit F une partie de E. Les conditions sont équivalentes :*

(i) *F est un sous-espace vectoriel de E ;*

(ii) *F n'est pas vide et, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et tout $(v, v') \in F^2$, on a : $\lambda v + \lambda' v' \in F$.*

Démonstration. « (i)⇒(ii) » : Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E ; alors F n'est pas vide. Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(v, v') \in F^2$. Alors λv et $\lambda' v'$ appartiennent à F ; puis $\lambda v + \lambda' v'$ appartient à F. Ainsi, la condition (ii) est satisfaite.
« (ii)⇒(i) » : Supposons F satisfait à (i). Alors F non vide. Soit $(v, v') \in F^2$, on a : $v + v' = 1v + 1v' \in F$. Soit de plus $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda v = \lambda v + 0v \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel. □

5° Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

a) Familles finies

Soit I un ensemble *fini*. Une famille de scalaires (indexée par I) est une application $\lambda : I \to \mathbb{K}$, $i \mapsto \lambda_i$. Notation typique : $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$.
Une famille de vecteurs (indexée par I) dans un espace vectoriel E est une application $v : I \to E$, $i \mapsto v_i$. Notation typique : $(v_i)_{i\in I} \in E^I$.

Exemple. Si $I = \{1, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, une famille de vecteurs est une n-liste : $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

b) Combinaison linéaire

Définition. Soit I un ensemble fini, soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires et soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On forme la *combinaison linéaire (c.l.)* :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \in E \qquad \text{(somme finie).}$$

Exemple. Si $I = \{1, \ldots, n\}$, une combinaison linéaire est : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Exemple. Si $I = \emptyset$, il n'y a qu'une seule famille de coefficients possible, la famille vide. La combinaison linéaire associée est [9] :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \overrightarrow{0}.$$

c) Sous-espace engendré

Définition. Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de $(v_i)_{i\in I}$ est noté :

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{v}) = \Big\{ \sum_{i\in I} \lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \Big\}.$$

On appelle $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ le *sous-espace vectoriel engendré* par $\mathbf{v}$.

La proposition suivante justifie cette appellation.

Proposition. *Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors* $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ *est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément,* $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les v_i ($i \in I$).*

Démonstration. D'abord, le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i\in I} 0 v_i.$$

Ensuite, une combinaison linéaire de combinaison linéaires est une combinaison linéaire de la famille initiale. Avec des notations évidentes, on a :

$$\alpha \sum_{i\in I} \lambda_i v_i + \alpha' \sum_{i\in I} \lambda'_i v_i = \sum_{i\in I} (\alpha\lambda_i + \alpha'\lambda'_i) v_i.$$

Cela prouve le premier point.
Quant au deuxième, il signifie que si F est un sous-espace vectoriel qui contient tous les v_i, alors il contient $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$. En effet, soit F un tel sous-espace. Soit (λ_i) une famille de scalaires. Pour tout i, on peut dire que $\lambda_i v_i$ appartient à F car F est un sous-espace ; pour la même raison, la somme des $\lambda_i v_i$ appartient à F. Cela prouve que $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ entier est contenu dans F. $\square$

9. On veut une convention qui rende vraie la relation naturelle : $\sum_{i\in I} v_i + \sum_{j\in J} v_j = \sum_{i\in I\cup J} v_i$ lorsque I et J sont disjoints ; pour $I = \emptyset$, cela force $\sum_{i\in\emptyset} v_i = \overrightarrow{0}$

II Familles libres et génératrices, bases

1° Sous-familles, sur-familles

La définition formelle est un peu déplaisante mais l'idée est simple : on passe d'une famille à une sous-famille (resp. sur-famille) en supprimant (resp. ajoutant) des éléments de la famille et en réordonnant éventuellement la famille ainsi obtenue.

Définition. Soient $\mathbf{u} = (u_i)_{i\in I}$ et $\mathbf{v} = (v_j)_{j\in J}$ deux familles. On dit que $\mathbf{u}$ est une *sur-famille* de $\mathbf{v}$ ou que $\mathbf{v}$ est une sous-famille de $\mathbf{u}$ s'il existe une injection $\varphi : J \to I$ telle que $v_j = u_{\varphi(j)}$ pour tout $j \in J$.

Exemple. Soit $\mathbf{u}$ la famille $(u_1, u_2, u_3) = (a, b, c)$, où a, b et c sont deux à deux distincts :
- la famille $(v_1, v_2) = (b, c)$ est une sous-famille de $\mathbf{u}$; prendre $\varphi : 1 \mapsto 2$ (pour $v_1 = u_2$), $2 \mapsto 3$ (pour $v_2 = u_3$) ;
- la famille $(w_1, w_2) = (c, a)$ est aussi une sous-famille de $\mathbf{u}$: prendre $\psi : 1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$;
- la famille (a, a, c) n'est pas une sous-famille de $\mathbf{u}$: en effet, a n'est pas répété dans $\mathbf{u}$.

2° Familles génératrices

a) Une notion importante, pas trop difficile.

Définition. Soit $\mathbf{u}$ une famille (finie) dans un espace vectoriel E. On dit que $\mathbf{u}$ est *génératrice* si tout vecteur de E peut s'écrire d'au moins une façon comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}$:

$$\forall v \in E, \quad \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I,\ v = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i.$$

Remarque. Voici deux autres formulations équivalentes de la définition (vérifiez !) :
- on a : $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}) = E$;
- l'application « combinaison linéaire »

$$\mathrm{CL} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^I & \longrightarrow & E \\ (\lambda_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} \lambda_i u_i \end{array}$$

  est surjective.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$:
- une famille (u_1) à un seul vecteur n'est jamais génératrice : en effet, toute combinaison linéaire de (u_1) est un multiple de u_1, il est dans la droite dirigée par u_1 (si $u_1 \neq \overrightarrow{0}$; si $u_1 = \overrightarrow{0}$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{0}) = \{\overrightarrow{0}\}$) ;
- une famille de deux vecteurs (u_1, u_2) avec $u_1 = \binom{a}{c}$ et $u_2 = \binom{b}{d}$ est génératrice si et seulement si $ad - bc \neq 0$. En effet, cherchons à quelle condition tout vecteur $v = \binom{x}{y}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de (u_1, u_2). Il s'agit de trouver (λ_1, λ_2) solutions du système

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a\lambda_1 + b\lambda_1 = x \\ c\lambda_1 + d\lambda_2 = y. \end{cases}$$

  On a vu au S1 que ce système admet une solution pour tout (x, y) si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Étudions l'indépendance linéaire de cette famille. On se donne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = y \\ -\lambda_1 \qquad + 4\lambda_3 = z \end{cases} \quad (S).$$

Pour résoudre (S), on permute les rôles de λ_1 et λ_2 pour exploiter le zéro et on utilise l'algorithme du pivot de Gauss : (S) est équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_3 = x \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = y \\ -\lambda_1 + 4\lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 - 4\lambda_3 = x + y \\ -\lambda_1 + 4\lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 - 4\lambda_3 = x + y \\ 0 = x + y + z \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit bien que l'existence d'une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de (S) est équivalente à la condition « excédentaire » $x + y + z = 0$:

— s'il y a une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, alors évidemment $x + y + z = 0$;

— si $x + y + z = 0$, on choisit λ_3 arbitrairement ; puis on trouve λ_2 grâce à la deuxième équation ; enfin, on trouve λ_1 grâce à la première équation ; on a ainsi une solution de (S).

Exercice. Montrer que la famille formée de $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est libre.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{K}$. Dans $\mathbb{K}^n$, on note e_i, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ le vecteur dont tous les coefficients sont nuls sauf le i-ème qui vaut 1 :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, que nous appellerons bientôt *base canonique* de $\mathbb{K}^n$, est génératrice : tout vecteur $v \in \mathbb{K}^n$ s'écrit

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Exemple. Soit $A = (A^{[1]}, \ldots, A^{[n]})$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^m$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $A^{[j]} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m}$. La famille A est génératrice si et seulement si le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

admet au moins une solution pour tout vecteur $B = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$.

b) Deux propriétés utiles

Proposition. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

Démonstration. Soit $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in I}$ une sur-famille d'une famille génératrice $\mathbf{v} = (v_j)_{j \in J}$. On note $\varphi : J \to I$ comme dans la définition de sur-famille. □

Proposition. *Soit* $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in I}$ *une famille libre. La famille obtenue en remplaçant, pour* $i_0 \in I$, *le vecteur* u_{i_0} *par*

— *un multiple* αu_{i_0} $(\alpha \in \mathbb{K}^*)$

— *ou une combinaison linéaire* $u_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \beta_i u_i$ $(\beta_i \in \mathbb{K})$

est libre.

Démonstration. Pour traiter les deux cas d'un coup, on fixe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\beta_k \in \mathbb{K}$ $(k \neq i_0)$ et on pose (prendre tous les β_k nuls pour retrouver le premier cas, $\alpha = 1$ pour le second) :

$$u'_i = \begin{cases} \alpha u_{i_0} + \sum_{k \neq i_0} \beta_k u_k & \text{si } i = i_0, \\ u_i & \text{si } i \neq i_0. \end{cases}$$

On veut montrer que $\mathbf{u}' = (u'_i)$ est libre. Pour cela, on fixe des □

3° Familles libres

a) Cette notion est aussi importante mais plus difficile que la précédente.

Définition. Soit $\mathbf{u}$ une famille (finie) de vecteurs de E. On dit que $\mathbf{u}$ est *libre* ou *linéairement indépendante* si

$$\forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I, \quad \Big(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \forall i \in I,\; \lambda_i = 0 \Big).$$

Exemple. La famille vide est libre. En effet, l'ensemble des familles de scalaires contient un unique élément (l'application qui à rien n'associe rien...) ; pour cette famille, la combinaison linéaire associée est nulle et on a bien : $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$ car cela signifie : $\forall i,\ i \in I \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0$, implication vraie car la prémisse $i \in I$ est fausse.

Notons que l'on peut considérer l'égalité

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0} \qquad (*)$$

comme un système d'équations (linéaires...) portant sur les λ_i. Il y a une solution évidente : tous les λ_i nuls. L'indépendance linéaire de $\mathbf{u}$ exprime que c'est la *seule*.
C'est particulièrement évident lorsque $E = \mathbb{K}^n$ et $I = \{1, \ldots, p\}$, auquel cas on écrit $u_i = (a_{ki})_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{K}^n$ et $(*)$ prend la forme :

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1p}\lambda_p = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2p}\lambda_p = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{np}\lambda_p = 0. \end{cases}$$

L'indépendance linéaire de $\mathbf{u}$ signifie que le système $(*)$ possède pour *unique* solution la solution évidente $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$.

La définition est assez complexe pour justifier que l'on détaille la négation.

Définition. On dit que $\mathbf{u}$ est *liée* ou *linéairement dépendante* si

$$\exists(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I, \quad \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0} \text{ et } \exists j \in J,\ \lambda_j \neq 0.$$

Exemple. Une famille contenant le vecteur nul est liée : en effet, si le vecteur d'indice i_0 est nul, on n'a qu'à considérer la combinaison linéaire qui

Exemple. Une famille à un vecteur (u_1) est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul. En effet, si le vecteur u_1 est nul, la famille est liée par l'exemple ci-dessous. S'il n'est pas nul, l'égalité $(*)$ prend la forme $\lambda_1 u_1 = \overrightarrow{0}$, dont on sait qu'elle implique alors : $\lambda_1 = 0$.

Exemple. Une famille formée de deux vecteurs (u_1, u_2) est liée si et seulement si les vecteurs sont colinéaires. En fait, c'est exactement la définition de colinéarité que l'on a prise au S1...

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, un couple de vecteurs (u_1, u_2) avec $u_1 = \binom{a}{c}$ et $u_2 = \binom{b}{d}$ est libre si et seulement si $ad - bc \neq 0$. En effet, cherchons à quelle condition

Exemple. Soit $n \in \mathbb{K}$. Dans $\mathbb{K}^n$, on note à nouveau e_i, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ le vecteur dont tous les coefficients sont nuls sauf le i-ème qui vaut 1 :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La famille $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, que nous appellerons bientôt *base canonique* de $\mathbb{K}^n$, est libre : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont des coefficients tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \overrightarrow{0}$, alors :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix},$$

de sorte que tous les λ_i sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

Exemple. Soit $A = (A^{[1]}, \dots, A^{[n]})$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^m$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $A^{[j]} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m}$. La famille A est libre si et seulement si le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

admet pour unique solution la solution évidente : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Voici enfin une reformulation de la définition qui montre qu'elle est *duale* de la notion de famille génératrice.

Lemme. *Soit* $\mathbf{u} = (e_1, \dots, e_n)$ *une famille de vecteurs de E. Alors, la famille* $\mathbf{u}$ *est libre SSI tout vecteur de E peut s'écrire au plus d'une façon comme combinaison linéaire de* $\mathbf{u}$.

Démonstration. Supposons la famille $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ libre. Soit v un vecteur de E qui s'écrit de deux façons comme combinaisons linéaires de $\mathbf{u}$, c'est-à-dire qu'il existe deux familles de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ telles que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i$. Alors on a : $\overrightarrow{0} =$

$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mu_i)u_i$. Par hypothèse, on a donc : $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i, ce qui entraîne l'unicité cherchée.
Réciproquement, supposons que tout vecteur s'écrive au plus d'une façon comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}$. Montrons que $\mathbf{u}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0} = \sum_{i=0}^{n} 0 u_i$. Par l'unicité de l'hypothèse appliquée au vecteur nul, on en déduit : $\lambda_i = 0$ pour tout i, ce qui entraîne que $\mathbf{u}$ est libre. □

b) Deux propriétés utiles

Proposition. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition. *Soit* $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in I}$ *une famille libre. La famille obtenue en remplaçant un vecteur* u_{i_0} *par*
— *un multiple* αu_{i_0} *(*$\alpha \in \mathbb{K}^*$*)*
— *ou une combinaison linéaire* $u_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \beta_i u_i$ *(*$\beta_i \in \mathbb{K}$*)*
est libre.

Démonstration. Pour traiter les deux cas d'un coup, on fixe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\beta_k \in \mathbb{K}$ $(k \neq i_0)$ et on pose (prendre tous les β_k nuls pour retrouver le premier cas, $\alpha = 1$ pour le second) :

$$u_i' = \begin{cases} \alpha u_{i_0} + \sum_{k \neq i_0} \beta_k u_k & \text{si } i = i_0, \\ u_i & \text{si } i \neq i_0. \end{cases}$$

On veut montrer que $\mathbf{u'} = (u_i')$ est libre. Pour cela, on fixe des coefficients $(\lambda_i)_{i \in I}$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i' = \overrightarrow{0}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i' = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i + \alpha \lambda_{i_0} u_{i_0} + \lambda_{i_0} \sum_{k \neq i_0} \beta_k u_k = u_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} (\lambda_i + \beta \lambda_{i_0}) u_i.$$

Par indépendance linéaire de $\mathbf{u}$, on a : $\alpha \lambda_{i_0} = 0$ et pour tout $i \neq i_0$: $\lambda_i + \beta \lambda_{i_0}$. Comme $\alpha \neq 0$, on en déduit que $\lambda_{i_0} = 0$ puis que tous les autres λ_i sont nuls. □

4° Relations entre familles libres et génératrices

Idée. On va établir des relations, pour une famille donnée, entre être génératrice et être libre. Quand on observe les derniers exemples de chacune des notions, on voit que c'est extraordinaire : cela revient à montrer l'équivalence, sous certaines hypothèses, entre le fait qu'un système admette *au moins une* solution et le fait qu'il en ait *au plus une*. C'est rare !

a) Voici une première relation plutôt formelle.

Définition. Soit $\mathbf{u}$ une famille de vecteurs. On dit que $\mathbf{u}$ est *libre maximale* si toute sur-famille stricte [10] est liée. On dit que $\mathbf{u}$ est *génératrice minimale* si toute sous-famille stricte [11] n'est pas génératrice.

Proposition. *Soit* $\mathbf{u}$ *une famille de vecteurs.*

(i) *Si la famille* $\mathbf{u}$ *est libre maximale, elle est génératrice.*

(ii) *Si la famille* $\mathbf{u}$ *est génératrice minimale, elle est libre.*

10. C'est-à-dire qui contient au moins un élément de plus que $\mathbf{u}$.
11. C'est-à-dire qui contient au moins un élément de moins que $\mathbf{u}$.

Démonstration. (i) On note $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)$. On suppose que $\mathbf{u}$ est libre maximale. Soit $v \in E$. Par hypothèse, la famille $(u_1, \ldots, u_p, v)$ est liée : il existe donc des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu)$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \mu v = \overrightarrow{0}$. On peut dire que $\mu \neq 0$: en effet, sinon la relation de dépendance linéaire précédente ne porterait que sur les vecteurs de $\mathbf{u}$, si bien que tous les coefficients λ_i seraient nuls aussi, contradiction. Par suite, on peut écrire : $v = \sum_{i=1}^p -\frac{\lambda_i}{\mu} u_i$. Cela montre que v est combinaison linéaire de $\mathbf{u}$, qui est donc génératrice.
(ii) On suppose que $\mathbf{u}$ est génératrice minimale. Montrons qu'elle est libre. Si $p = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $p \geqslant 1$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une famille de scalaires tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = \overrightarrow{0}$. Fixons i_0 entre 1 et p et montrons que $\lambda_{i_0} = 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut écrire :

$$u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i.$$

Montrons que qu'alors, $(u_1, \ldots, u_{i_0-1}, u_{i_0+1}, \cdots, u_p)$ est génératrice. En effet, soit $v \in E$. On peut trouver des scalaires $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ tels que $v = \sum_{i=1}^p \mu_p u_p$. Mais alors, on peut écrire :

$$v = \sum_{i \neq i_0} \mu_i u_i + \mu_{i_0} u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \mu_i u_i + \mu_{i_0} \sum_{i \neq i_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i = \sum_{i \neq i_0} \Big(\mu_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \mu_{i_0} \Big) u_i,$$

ce qui montre bien que v est combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_{i_0-1}, u_{i_0+1}, \cdots, u_p)$.
Ainsi, si l'un des λ_i était nul, la famille obtenue en supprimant le vecteur correspondant serait génératrice, ce qui contredirait l'hypothèse sur $\mathbf{u}$. Cela montre que tous les λ_i sont nuls et $\mathbf{u}$ est libre. □

b) La résultat technique suivant est la clé de voûte de la théorie de la dimension à venir. Sa preuve est difficile (non exigible) mais le résultat doit être retenu.

Proposition (Steinitz[12]). *Soient* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ *une famille libre et* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *une famille génératrice. Alors :* $m \leqslant n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n, le nombre de vecteurs de la famille *génératrice*. Pour $n = 0$, la famille $\mathbf{v}$ est la famille vide donc le sous-espace qu'elle engendre est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Comme toute famille contenant le vecteur nul est liée (voir un des exemples ci-dessus), la famille $\mathbf{u}$ est nécessairement vide, c'est-à-dire que $m = 0$ et l'inégalité $m \leqslant n$ est prouvée.
Soit n un entier non nul. On suppose que dans tout espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs au plus, toute famille libre a au plus $n-1$ vecteurs. Soit E un espace engendré par une famille $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ et soit $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ une famille libre. On va prouver que $m \leqslant n$. Si $\mathbf{u}$ est la famille vide, $m = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon, on utilise l'idée du pivot de Gauss pour éliminer un vecteur de $\mathbf{v}$.
Comme $\mathbf{v}$ est génératrice, chaque vecteur de $\mathbf{u}$ est combinaison linéaire de $\mathbf{v}$: il existe des scalaires a_{ij} tels que

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_1 = a_{i1} v_1 + \cdots + a_{in} v_n \\ u_2 = a_{21} v_1 + \cdots + a_{2n} v_n \\ \vdots \\ u_m = a_{m1} v_1 + \cdots + a_{mn} v_n. \end{cases}$$

12. Il s'agit d'Ernst Steinitz. L'orthographe donnée en amphi était erronée !

Comme $\mathbf{u}$ est libre, le vecteur u_m n'est pas nul, donc l'un des coefficients $a_{m1}, \dots, a_{mn}$ n'est pas nul. Quitte à permuter les v_j, on peut supposer que $a_{mn} \neq 0$. On utilise a_{mn} comme un pivot pour annuler les coefficients a_{in}. Plus précisément, on pose, pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$:

$$u'_i = u_i - \frac{a_{in}}{a_{mn}} u_m.$$

L'intérêt, c'est que les u_i sont des combinaisons linéaires de $(v_1, \dots, v_{n-1})$. En effet, pour tout i :

$$u'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - \frac{a_{in}}{a_{mn}} \sum_{j=1}^{n} a_{mj} v_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(a_{ij} - \frac{a_{in} a_{mj}}{a_{mn}} \Big) v_j = \sum_{j=1}^{n-1} \Big(a_{ij} - \frac{a_{in} a_{mj}}{a_{mn}} \Big) v_j$$

car le coefficient de v_n est : $a_{in} - \frac{a_{in} a_{mn}}{a_{mn}} = 0$.

Montrons que $(u'_1, \dots, u'_{m-1})$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i u'_i = \overrightarrow{0}$. On a alors :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i u'_i = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \Big(u_i - \frac{a_{in}}{a_{mn}} u_m \Big) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_{in}}{a_{mn}} \lambda_i \right) u_m,$$

et l'hypothèse que $\mathbf{u}$ est libre permet d'affirmer que $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Ainsi, la famille $(u'_1, \dots, u'_{m-1})$ est libre dans l'espace engendré par $(v_1, \dots, v_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $m-1 \leqslant n-1$, d'où $m \leqslant n$. On peut conclure. □

III Bases

1° Les bases sur les bases [13]

Définition. On appelle *base* toute famille libre et génératrice.

Lemme. *Soit* $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ *une famille de vecteurs de* E*. Alors, la famille* $\mathbf{e}$ *est une base si et seulement si tout vecteur de* E *peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de* $\mathbf{e}$*. Autrement dit, l'application « combinaison linéaire » suivante est bijective :*

$$\mathrm{CL} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Démonstration. On a vu que $\mathbf{e}$ est génératrice (resp. libre) SSI tout vecteur de E peut s'écrire au moins (resp. au plus) d'une façon comme combinaison linéaire de $\mathbf{e}$. Le lemme est la conjonction de ces deux propriétés. □

Exemple. La famille vide, qui est libre, est une base de l'espace vectoriel $\{\overrightarrow{0}\}$.

Exemple. De façon générale, toute famille libre est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Exemple. Deux vecteurs non colinéaires forment une base de $\mathbb{R}^2$, comme on l'a vu au S1.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{K}^n$, on pose à nouveau

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base (déjà vu), on l'appelle *base canonique* ou *base standard* de $\mathbb{K}^n$.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On l'appelle parfois *base canonique* ou *base standard*.

13. Jeu de mots un peu baseux, il faut avouer.

2° Théorème de la base incomplète

Remarque. Dans ce qui suit, pour exprimer qu'une famille $\mathbf{u}$ est une sous-famille de $\mathbf{v}$, on notera $\mathbf{u} \subset \mathbf{v}$. C'est un abus de notation puisque ni $\mathbf{u}$, ni $\mathbf{v}$ ne sont des ensembles. Cela signifie que les vecteurs de $\mathbf{u}$ sont des vecteurs de $\mathbf{v}$, répétés au moins autant de fois dans $\mathbf{v}$ que dans $\mathbf{u}$. De même, on appellera *cardinal* d'une famille le cardinal de l'ensemble des indices.

Théorème. *Dans un espace E, soient $\mathbf{l} = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ et $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_r)$ deux familles. On suppose que $\mathbf{l}$ est libre, que $\mathbf{g}$ est génératrice et que $\mathbf{l} \subset \mathbf{g}$.*
Alors, il existe une base $\mathbf{b}$ de E telle que $\mathbf{l} \subset \mathbf{b} \subset \mathbf{g}$.

Cela signifie qu'on peut compléter $\mathbf{l}$ par des vecteurs choisis dans $\mathbf{g}$ en une base de E ; si on préfère, qu'on peut éliminer des vecteurs de $\mathbf{g}$ qui ne sont pas dans $\mathbf{l}$ pour en extraire une base.

Démonstration. On introduit l'ensemble de familles suivant :

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{e} : \ \mathbf{e} \text{ libre}, \ \mathbf{l} \subset \mathbf{e} \subset \mathbf{g}\}.$$

Comme tout élément $\mathbf{e}$ de $\mathcal{L}$ est une sous-famille de $\mathbf{g}$, elle contient au plus r vecteurs. Par conséquent, l'ensemble des cardinaux des familles qui appartiennent à $\mathcal{L}$,

$$A = \{k \in \mathbb{N}, \ \exists \mathbf{e} \in \mathcal{L}, \ k = \operatorname{card} \mathbf{e}\} \subset \mathbb{N},$$

est une partie finie de $\mathbb{N}$: elle a donc un élément maximal $n \leqslant r$. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ un élément de $\mathcal{L}$ de cardinal n. Par définition de $\mathcal{L}$, c'est une famille libre emboîtée entre $\mathbf{l}$ et $\mathbf{g}$. Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice.
Pour cela, on commence par montrer que tout vecteur de $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_r)$ est combinaison linéaire de $\mathbf{e}$. En effet, soit g_i un vecteur de $\mathbf{g}$. Si g_i apparaît dans $\mathbf{e}$, alors c'est une combinaison linéaire de $\mathbf{e}$. Sinon, $(e_1, \ldots, e_n, g_i)$ est une sur-famille de $\mathbf{l}$ et une sous-famille de $\mathbf{g}$: par maximalité de n, elle est liée. Comme dans la preuve de « libre maximale $\Rightarrow$ génératrice », on en déduit que g_i est combinaison linéaire de $\mathbf{e}$.
Mais alors, comme tout v de E est combinaison linéaire des g_i et chaque g_i est combinaison linéaire des e_k, le vecteur v est combinaison linéaire des e_k. Pour utiliser une propriété déjà vue : chaque g_i appartient à $\operatorname{Vect}(\mathbf{e})$ donc $\operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_r) \subset \operatorname{Vect}(\mathbf{e})$, ce qui donne : $E \subset \operatorname{Vect}(\mathbf{e})$. □

Corollaire. *Tout espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie admet une base.*

Démonstration. Appliquer le théorème de la base incomplète à la famille vide et à la famille génératrice donnée. □

3° Dimension

a) La notion de dimension résulte du deuxième théorème profond du chapitre.

Théorème. *Soit E un espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toutes les base de E ont le même cardinal.*

Démonstration. Soient $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E. Comme $\mathbf{e}$ est libre et $\mathbf{f}$ génératrice, le lemme de Steinitz donne : $m \leqslant n$. Mais à l'inverse, $\mathbf{f}$ est libre et $\mathbf{e}$ est génératrice, d'où $n \leqslant m$. □

Définition. Soit E un espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On appelle *dimension* de E le cardinal commun à toutes les bases de E. On la note : $\dim(E)$.

Remarque. Ce théorème étend ce que l'on a déjà constaté dans $\mathbb{R}^2$: une base a toujours deux vecteurs – une famille à 1 vecteur n'est pas génératrice, une famille à 3 vecteurs n'est pas libre.
Il faut comprendre la dimension d'un espace comme le nombre de coordonnées nécessaires pour décrire un vecteur. Par exemple, on appelle *droite* (resp. *plan*) un espace de dimension 1 (resp. 2) : on est habitué au fait qu'il faille 1 (resp. 2) coordonnées pour décrire un point sur une droite (resp. un plan) – par exemple, un kilométrage sur une autoroute (resp. l'abscisse et l'ordonnée, ou le numéro de la rue et de l'avenue dans le plan de New York).
Autre vocabulaire à la physicienne : la dimension est le nombre de degrés de liberté dont on dispose dans l'espace. C'est un invariant extrêmement robuste.

b) On a un critère bien commode pour détecter les bases lorsqu'on a ≪ le bon nombre de vecteurs ≫ : il divise le travail par deux.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille à n vecteurs. Alors, $\mathbf{e}$ est libre SSI $\mathbf{e}$ est génératrice SSI $\mathbf{e}$ est une base.*

Démonstration. Comme ≪ base = libre + génératrice ≫, il suffit de montrer que ≪ libre ⇒ base ≫ et que ≪ génératrice ⇒ base ≫.
Supposons $\mathbf{e}$ libre. Alors on peut compléter $\mathbf{e}$ en une sur-famille $\mathbf{b}$ qui est une base. Par l'hypothèse et le théorème de la dimension, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{b}$ ont le même nombre de vecteurs : elles sont égales, si bien que $\mathbf{e}$ est une base.
Supposons $\mathbf{e}$ génératrice. Alors on peut éliminer certains vecteurs de $\mathbf{e}$ pour faire une sous-famille $\mathbf{b}$ qui est une base. Par l'hypothèse et le théorème de la dimension, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{b}$ ont le même nombre de vecteurs : elles sont égales, de sorte que $\mathbf{e}$ est une base. □

Remarque. Étonnant, non ? Comme toutes les propriétés liant familles génératrices et libres !

IV Sous-espaces, opérations sur les sous-espaces

1° Dimension d'un sous-espace

a) Un des critères pour voir si la théorie est bien construite, c'est qu'il soit facile de montrer que les sous-espaces sont de dimension finie pas plus grande que l'espace ambiant.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie F un sous-espace de E. Alors F est de dimension finie et on a :* $\dim F \leqslant \dim E$.

Démonstration. Soit $n = \dim E$. Une famille libre dans F est aussi libre dans E (vérifier !). Par le lemme de Steinitz, elle a au plus n vecteurs. Par suite, l'ensemble des cardinaux des familles libres de F est majoré par n, de sorte qu'il existe une famille libre de cardinal maximal. Une telle famille est libre maximale dans F (vérifier !), c'est une base de F et elle a au plus n vecteurs. □

b) Rang d'une famille

Définition. On appelle *rang* d'une famille finie $\mathbf{v}$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$.

Remarque. Il faut connaître des TD les méthodes pour calculer le rang d'une famille, une base du sous-espace engendré, des équations de ce sous-espace, etc.

c) On en déduit un critère d'égalité d'usage quotidien.

Proposition. *Soient F un sous-espace vectoriel de E. Si* $\dim F = \dim E$, *alors* $F = E$.

Remarque. La réciproque est évidente.

Démonstration. Soit $\mathbf{e}$ une base de F. Par hypothèse, elle contient $\dim(E)$ vecteurs. Or c'est une famille libre de F donc de E. Par la proposition précédente, c'est donc une base de E. Par suite : $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}) = E$. □

Corollaire. *Soient F et G deux sous-espaces de E. Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.*

Démonstration. Appliquer la proposition à G. □

2° Somme et intersection

Commençons par une évidence (vérifier !).

Lemme. *L'intersection de deux sous-espaces est un sous-espace.* □

Exercice. La réunion de deux sous-espaces n'est pas, en général, un sous-espace !
Plus précisément, soient F et G deux sous-espaces. Alors $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition. Soient F et G deux sous-espaces de E. On définit la somme de F et G comme

$$\begin{aligned} F + G &= \{w \in E,\ \exists u \in F,\ \exists v \in G,\ w = u + v\} \\ &= \{u + v,\ u \in F \text{ et } v \in G\}. \end{aligned}$$

Lemme. *Soient F et G deux sous-espaces de E. Alors $F + G$ est le plus petit sous-espace de E qui contient F et G. Autrement dit : $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.*

Démonstration. D'abord, on a : $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} \in F + G$ car $\overrightarrow{0} \in F$ et $\overrightarrow{0} \in G$. Soient $w, w' \in F + G$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On sait qu'existent $u, u' \in F$ et $v, v' \in G$ tels que $w = u + v$ et $w' = u' + v'$. Alors :

$$\lambda w + \lambda' w' = \lambda(u + v) + \lambda'(u' + v') = \underbrace{\lambda u + \lambda' u'}_{\in F} + \underbrace{\lambda v + \lambda' v'}_{\in G} \in F + G.$$

Cela montre que $F + G$ est un sous-espace. Il contient F et G car un vecteur $u \in F$ s'écrit $u = u + \overrightarrow{0} \in F + G$ et un vecteur $v \in G$ s'écrit $v = \overrightarrow{0} + v \in F + G$. Inversement, si un sous-espace contient F et G, il contient les sommes de la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. □

a) Formule de Grassmann

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces de E. Alors :*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Remarque. Cette formule n'est pas sans rappeler celle-ci, pour les ensembles finis :

$$\mathrm{card}(X \cup Y) = \mathrm{card}(X) + \mathrm{card}(Y) - \mathrm{card}(X \cap Y).$$

Démonstration. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $F \cap G$. On complète $\mathbf{e}$ en une base $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s)$ de F et en une base $(e_1, \ldots, e_r, g_1, \ldots, g_t)$ de G. Montrons que $\mathbf{b} = (e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t)$ est une base de $F + G$.
D'abord, $\mathbf{b}$ est libre. Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_t)$ sont des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{t} \nu_k g_k = \overrightarrow{0},$$

alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j f_j}_{\in F} = -\underbrace{\sum_{k=1}^{t} \nu_k g_k}_{\in G},$$

vecteur de à $F \cap G$ qui est donc une combinaison linéaire de $\mathbf{e}$: il existe $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j f_j = -\sum_{k=1}^{t} \nu_k g_k = \sum_{i=1}^{r} \pi_i e_i,$$

ce qui donne, puisque $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s)$ de F et $(e_1, \ldots, e_r, g_1, \ldots, g_t)$ sont libres : $\lambda_i = \pi_i$ et $\mu_j = 0$ d'une part, $\nu_k = 0$ et $\pi_i = 0$ d'autre part. Donc $\mathbf{b}$ est libre.
Ensuite, $\mathbf{b}$ est génératrice dans $F + G$. Soit en effet $w \in F + G$. On écrit $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, puis $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j f_j$ et $v = \sum_{i=1}^{r} \pi_i e_i + \sum_{k=1}^{s} \nu_k g_k$, et enfin $w = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \pi_i) e_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{s} \nu_k g_k$.
Pour conclure, on vérifie la formule grâce à la dimension des quatre sous-espaces :

$$\dim(F \cap G) = r, \quad \dim(F) = r + s, \quad \dim(G) = r + t, \quad \dim(F + G) = r + s + t. \qquad \square$$

3° Supplémentaires

a) Cas de deux sous-espaces

Définition. Soient F et G deux sous-espaces de E. On dit que F et G sont *en somme directe* si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. On note alors $F \oplus G$ la somme (dite directe) $F + G$.
On dit que F et G sont *supplémentaires* si

$$F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \quad \text{et} \quad F + G = E.$$

Lemme. *Soient F et G deux sous-espaces de E. Alors :*

(i) *$F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ SSI tout vecteur s'écrit au plus d'une façon comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ;*

(ii) *$F + G = E$ SSI tout vecteur s'écrit au moins d'une façon comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ;*

(iii) *$F \oplus G = E$ SSI tout vecteur s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

Démonstration. (i) Supposons $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. Soit $w \in F + G$ un vecteur qui s'écrit $w = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ avec $u_1, u_2 \in F$ et $v_1, v_2 \in G$. Alors : $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ donc $u_1 - u_2 = \overrightarrow{0}$ et $v_2 - v_1 = \overrightarrow{0}$: d'où l'unicité.
Réciproquement, supposons l'unicité. Soit $w \in F \cap G$. On écrit

$$w = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G} = \underbrace{w}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in G};$$

par unicité d'une telle décomposition, il vient : $w = \overrightarrow{0}$.
(ii) est évident ; (iii) est la conjonction de (i) et (ii). $\square$

Exemple. Soit E l'espace des fonction définies sur $\mathbb{R}$. On note F (resp. G) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires). Ce sont deux sous-espaces (vérifier !) et on a : $F \oplus G = E$.
Clé : pour toute fonction $h \in E$, on a : $h(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2} + \frac{h(x)-h(-x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Par la formule de Grassmann, si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Voici un critère commode pour tester si deux sous-espaces sont supplémentaires.

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces de E tels que* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. *Alors, F et G sont supplémentaires SSI leur intersection est triviale SSI leur somme est E :*

$$F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \;\Leftrightarrow\; F + G = E \;\Leftrightarrow\; F \oplus G = E.$$

Démonstration. Il suffit de montrer la première équivalence. Par le critère d'égalité pour les sous-espaces, on a d'une part, $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ SSI $\dim(F \cap G) = 0$; d'autre part, $F + G = E$ SSI $\dim(E) - \dim(F + G) = 0$. Enfin, par l'hypothèse et la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E) - \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \big(\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)\big) = \dim(F \cap G). \quad \square$$

b) Existence de sous-espaces

Proposition. *Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On cherche un supplémentaire de F. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. C'est une famille libre de E donc on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit alors $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$: c'est un supplémentaire de F.
En effet, soit $u \in E$. Il s'écrit sous la forme $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ convenable. Alors, $u = v + w$ avec $v = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in F$ et $w = \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in G$, d'où $E = F + G$. Par ailleurs, si $u \in F \cap G$, il s'écrit sous la forme $u = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ car $(e_1, \dots, e_k)$ engendre F et sous la forme $u = \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i$ car $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ engendre G. Mais alors, $\sum_{i=1}^{k} x_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{0}$ donc, par indépendance linéaire, tous les x_i sont nuls et $u = \overrightarrow{0}$. Cela prouve que $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ et permet de conclure. $\square$

Mise en garde. *En général, un sous-espace admet* une infinité *de supplémentaires !*

Exemple. Si F est une droite de $\mathbb{R}^2$ (ou un plan de $\mathbb{R}^3$), *toute droite* de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) qui n'est pas (contenue dans) F est un supplémentaire de F.

c) Extension à un nombre fini de sous-espaces

Ce paragraphe sera utile pour les *sous-espaces propres* et les *sous-espaces caractéristiques* en S3.

Définition. Soient $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces de E. On dit qu'ils sont *en somme directe* si

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1} + F_{i+1} + \cdots + F_r) = \{\overrightarrow{0}\}.$$

On note alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ ou $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ la somme de sous-espaces F_i.
Un cas particulièrement intéressant est celui où l'on a : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r = E$: tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme de vecteurs des F_i.

Exercice. La condition de somme directe équivaut à dire qu'un vecteur de E s'écrit au plus d'une façon comme somme de vecteurs des F_i.

V Familles infinies, espaces de dimension infinie

On travaille sur un corps $\mathbb{K}$ et on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On abandonne l'hypothèse implicite des parties précédentes selon laquelle E admet une famille génératrice finie.

1° Familles infinies

a) Vous avez vu en analyse comment on peut définir par exemple lorsque $I = \mathbb{N}$ une somme $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ pour *certaines* suites de réels $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et quelles acrobaties on pouvait faire pour, par exemple $\sum_{i=0}^{+\infty} i$, et dire un peu n'importe quoi.
De façon générale, donnons-nous un ensemble I infini et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires ou de vecteurs. Du point de vue algébrique, la somme $\sum_{i\in I} x_i$ n'a aucun sens. Pour *certains* corps, dans *certains* espaces et pour *certaines* familles, on peut définir une somme infinie avec des idées d'analyse. En général, ce n'est pas possible. Pour étendre la notion de combinaison linéaire, il faut donc prendre des précautions.

Définition. Soit un ensemble I, fini ou non. Soit $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires indexé par I. On dit que $\mathbf{x}$ est *presque nulle* si tous les x_i sont nuls sauf un nombre fini :

$$\operatorname{card}\{i \in I,\ x_i \neq 0\} < +\infty.$$

(Ainsi, si I est fini, toute famille est presque nulle.)
On note $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des familles de scalaires indexées par I et $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles.
Étant donnée une famille de vecteurs $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I} \in E^I$ et une famille presque nulle de scalaires $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$, on peut définir la *combinaison linéaire* $\sum_{i\in I} x_i v_i$ – il n'y a qu'un nombre fini de termes à ajouter. On note appelle espace vectoriel engendré par $\mathbf{v}$ et on note $\operatorname{Vect}(\mathbf{v})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{v}$ – on vérifie que c'est le plus petit sous-espace de E qui contient tous les v_i.

Exemple. Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Tout polynôme est une combinaison linéaire de la famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Définition. Soit I un ensemble et soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs indexée par I. On dit que $\mathbf{v}$ est *génératrice* si pour tout vecteur w de E, il existe une famille de scalaires presque nulle $(x_i)_{i\in I}$ telle que $w = \sum_{i\in I} x_i v_i$.
On dit que $\mathbf{v}$ est *libre* si toute sous-famille finie de $\mathbf{v}$ est libre ; il revient au même de demander que pour toute famille presque nulle de scalaires $(x_i)_{i\in I}$, la relation $\sum_{i\in I} x_i v_i = \overrightarrow{0}$ entraîne que $x_i = 0$ pour tout i de I (vérifier !).
On dit que $\mathbf{v}$ est une *base* si elle est libre et génératrice.

Exemple. La famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice (difficile). Soit E l'espace des fonction réelles définies sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto |t-a|$; $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{at}$; $h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(t-a)$. Alors les familles $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ et $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ sont libres mais $(h_a)_{a\in\mathbb{R}}$ ne l'est pas – on a : $\operatorname{Vect}\big((h_a)_{a\in\mathbb{R}}\big) = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$.

Remarque. Les notions de sous-famille, toutes les propriétés des familles libres et génératrices s'étendent au cas de familles infinies avec essentiellement les mêmes preuves : toute sous-famille libre d'une famille libre est libre, toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice, toute famille libre maximale est génératrice, toute famille génératrice minimale est libre. Ça se corse un peu quand on se demande s'il existe des bases.

2° Espaces de dimension quelconque

Théorème. *Dans un espace vectoriel E, soient $\mathbf{l}$ et $\mathbf{g}$ deux familles. On suppose que $\mathbf{l}$ est libre, que $\mathbf{g}$ est génératrice et que $\mathbf{l} \subset \mathbf{g}$. Alors, il existe une base $\mathbf{b}$ de E telle que $\mathbf{l} \subset \mathbf{b} \subset \mathbf{g}$.*

La preuve suit les mêmes lignes mais il y a une difficulté : comment prouver que l'ensemble $\mathcal{L}$ des familles libres emboîtées entre $\mathbf{l}$ et $\mathbf{g}$ admet un élément maximal ? C'est un problème de théorie (non naïve) des ensembles, cela exige et résulte de l'axiome du choix ou, plus précisément, d'une version équivalente appelée lemme de Zorn [14].

Théorème. *Dans un espace vectoriel E, deux bases quelconques ont le même cardinal.*

Ici, « avoir le même cardinal » signifie qu'il existe une bijection de l'ensemble qui indexe l'une sur l'autre. Comme précédemment, les nouveaux problèmes qui se posent relèvent de la théorie des ensembles. Pour une preuve, voir par exemple le livre *Algèbre* de Serge Lang.

Exemple. On peut considérer $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. On ne peut pas en construire une base sans l'axiome du choix. Elle aura le même cardinal que $\mathbb{R}$. Cela permet par exemple de construire des fonctions telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y mais qui ne sont bornées sur aucun intervalle, continue en aucun point – de belles horreurs !

Pour résumer, les principaux théorèmes du chapitre sont vrais en dimension quelconque mais ils deviennent un peu plus difficiles à démontrer en dimension infinie pour des raisons de théorie des ensembles.

14. Voici un bon mot (origine ?). L'axiome du choix est évident pour tout le monde ; aucune personne sensée ne se prononcera sur l'axiome de Zorn ; quant à l'axiome de Zermelo, il est évidemment faux pour tout le monde ; pourtant, il est relativement facile de montrer que ces propriétés sont équivalentes...