Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Cursus préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année, $2^{\text{ème}}$ semestre : Analyse

---

Feuille d'exercices n° 3

Développements limités et utilisations

Exercice 3.1. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + x^3 - x,\ g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + 1 \text{ et } h(x) = (x-1)^3.$$

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune de ces fonctions.

(b) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction f.

(c) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction fg.

(d) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $\dfrac{1}{g}$.

(e) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)} + x^2$.

Exercice 3.2. Soient f et g deux fonctions quatre fois dérivables dont les développements limités en 0 à l'ordre 4 sont donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4) \text{ et}$$

$$g(x) = x + 2x^2 + 3x^2 + 4x^4 + o(x^4).$$

(a) Trouver $g''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

(b) Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes.

(i) fg.

(ii) $\dfrac{g}{f}$.

(iii) $f \circ g$.

(iv) La primitive de f qui vaut 1 en 0.

(v) $\ln f$.

(c) Peut-on déterminer le développement limité de $g \circ f$ en 0 ? De $\ln g$?

(d) Est-ce que $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité en 0 ?

(e) Déterminer le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{xf(x)}{g(x)}$ en 0 au plus grand ordre possible.

(f) Peut-on déterminer le développement limité de la fonction f' en 0 à l'ordre 4 ? Donner le développement limité de f' en 0 d'ordre maximal que l'on peut déduire.

(g) Déterminer le développement limité de la fonction réciproque f^{-1} au point 1 à l'ordre 1 en justifiant son existence.

(h) Montrer que la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f^{(3)}(x)}{g^{(3)}(x)}$ existe et la calculer. Noter toutefois que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'admet pas de limite en 0.

(i) Pour $i = 1$ et $i = 2$, trouver une fonction f_i quatre fois dérivable qui admet le même développement limité en 0 à l'ordre 4 que f et telle que $f_i(1) = i$.

Exercice 3.3. Donner pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un équivalent simple :

(a). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 0$,

(b). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to +\infty$,

(c). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 2$,

(d). $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 1$,

(e). $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln x)^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 5^{x+1}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3.4. Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

a. $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$

b. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $n = 6$

c. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$

d. $f(x) = e^{3x}\sin(2x)$ et $n = 4$

e. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$

f. $f(x) = \tan x$ et $n = 5$

g. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 3$

h.$f(x) = (1+x)^{1/x}$ et $n = 3$

i. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et $n = 3$

j. $f(x) = \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ et $n = 4$

k. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh} x}$ et $n = 4$

l. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ et $n = 3$.

Exercice 3.5. Déterminer les réels a et b pour que $\cos x - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible au voisinage de 0.

Exercice 3.6.

1. Déterminer $\arcsin^{(6)}(0)$,
2. Faire un développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. En déduire un développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction arcsin,
4. Déterminer $\arcsin^{(7)}(0)$.

Exercice 3.7. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence) :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \sin(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$

h. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

i. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Exercice 3.8. Calculer un développement limité ou asymptotique de la fonction f dans chacun des cas suivants :

(a). $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,

(b). $f(x) = \sqrt{2 + x}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3,

(c). $f(x) = \ln(2 + x)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2, (d). $f(x) = \sin x$ où x tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3,

(e). $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0, puis pour x tendant vers 1,

(f). $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 3,

(g). $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs,

(h). $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 3.9. Calculer les limites suivantes (en montrant leur existence) :

(a). $\dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$ quand x tend vers 1,

(b). $\sqrt{\dfrac{x^3 - 2x}{x-1}} - x$ quand x tend vers $+\infty$,

(c). $x\left(\dfrac{1}{e} - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3.10. Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{6}; 0\right[\cup \left]0; \dfrac{\pi}{6}\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1 - 2\sin x)}{\operatorname{sh}(2x)}$.

1. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f possède une limite quand x tend vers 0. On notera l cette limite dans la suite de l'exercice.
3. On pose $f(0) = l$. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0.

Exercice 3.11. On définit, pour $x \in]0; +\infty[$, les fonctions f et g par

$$f(x) = \arctan x - \arctan(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\arctan x}{\arctan(x+1)}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$. En remarquant que $f(x) \sim \tan(f(x))$ quand x tend vers $+\infty$, en déduire que $f(x) \sim -\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $g(x)$, puis montrer que $\ln(g(x)) \sim \dfrac{f(x)}{\arctan(x+1)}$ en $+\infty$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\arctan x}{\arctan(x+1)}\right)^{x^2}$.

Exercice 3.12. Soient f et g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \ln(1 - x^2) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

1. Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5, quand x tend vers 0.
2. Déduire de ces développements limités l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[$, $f(x) < g(x)$.