Feuille d'exercices numéro 1
Encore un peu d'algèbre linéaire dans le plan

Dans cette fiche, on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 1
Dans $\mathbf{R}^2$ on note $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (2, 7)$.
On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

1) Pourquoi (u_1, u_2) est-il une base de $\mathbf{R}^2$?

2) Pourquoi était-il légitime d'introduire la matrice P^{-1} ? Expliciter ses coefficients.

3) Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ les coordonnées de e_1 et $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ celles de e_2 dans la base (u_1, u_2).

a) Écrire des systèmes d'équations vérifiés respectivement par (α, β) et par (γ, δ).

b) En déduire que $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ et $\delta = d$.

4) Soit $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ défini par $\varphi(x, y) = (-3x + 6y, 9x + 3y)$.

a) Montrer que φ est linéaire et expliciter sa matrice dans la base canonique.

b) Écrire les vecteurs $\varphi(u_1)$ et $\varphi(u_2)$ comme combinaisons linéaires de e_1 et e_2, puis comme combinaisons linéaires de u_1 et u_2.

c) Expliciter la matrice de φ dans (u_1, u_2).

Exercice 2
1) Soit φ une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ qui a la propriété suivante : la matrice de φ ne dépend pas de la base dans laquelle on l'exprime.
On note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de φ dans (e_1, e_2).

a) Écrire la matrice de φ dans la base (e_2, e_1) de deux façons différentes et en déduire deux égalités liant les coefficients a, b, c et d.

b) Dans cette sous-question on note $u_1 = e_1$ et $u_2 = e_1 + e_2$. Pourquoi (u_1, u_2) est-il une base de $\mathbf{R}^2$? Écrire les vecteurs e_1 et e_2 comme combinaisons linéaires de u_1 et u_2 puis (en suivant le même plan d'action qu'à l'exercice précédent), écrire la matrice de φ dans (u_1, u_2).

c) Que dire de φ ?

2) Quelles sont les applications linéaires de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ dont la matrice ne dépend pas de la base dans laquelle on la calcule ?

Exercice 3
Soit φ une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$. On suppose que φ n'est pas l'application nulle, et que $\varphi \circ \varphi = 0$. Soit v un vecteur tel que $\varphi(v) \neq 0$, on notera $u = \varphi(v)$.

1) Montrer que (u, v) est une base de $\mathbf{R}^2$. Écrire la matrice de φ dans la base (u, v).

2) Déterminer l'ensemble des quadruplets de réels (a, b, c, d) pour lesquels $(au + bv, cu + dv)$ est une base de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de φ est la matrice déterminée à la question précédente.

Exercice 4
Pour tous a et b réels, on note $\varphi_{a,b}$ l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ définie par : $\varphi_{a,b}(x, y) = (a(x + y), b(x + y))$.

1) Montrer que $\varphi_{a,b}$ est linéaire et écrire sa matrice dans la base canonique.

2) Dans cette question, on suppose que $a + b \neq 0$. Fournir une base de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de $\varphi_{a,b}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a + b \end{pmatrix}$.

3) Que peut-on faire quand $a + b = 0$? (On pourra, on devra même, utiliser l'exercice précédent).

Exercice 5
Pour tous a et b réels, on note $\varphi_{a,b}$ l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ définie par : $\varphi_{a,b}(x,y) = (ax+by, x)$.
Cet exercice s'intéresse aux suites (u_n) de réels qui vérifient pour tout $n \geq 0$ la relation de récurrence :

$$(*) \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1) Montrer que $\varphi_{a,b}$ est linéaire et écrire sa matrice dans la base canonique.

2) Dans cette question, et dans cette question seulement, on utilisera les valeurs particulières $a = 7$ et $b = -12$. Faire fonctionner sur cet exemple particulier les notions apprises en Analyse I pour déterminer dans un premier temps la forme générale des suites de réels véfiant la relation de récurrence $(*)$, puis préciser celle des solutions trouvées qui vérifie les conditions initiales $u_0 = 3$ et $u_1 = 10$.

3) Dans cette question, on suppose que l'équation du second degré $x^2 - ax - b = 0$, d'inconnue notée x, a deux racines réelles r_1 et r_2. On note $f_1 = (r_1, 1)$ et $f_2 = (r_2, 1)$. Justifier pourquoi (f_1, f_2) est une base de $\mathbf{R}^2$. Déterminer la matrice de $\varphi_{a,b}$ dans cette base, puis déterminer la matrice de $\varphi_{a,b}^n$ dans cette base (où $\varphi_{a,b}^n$ est à comprendre comme une puissance pour la composition des applications).

4) Soit (u_n) une suite de réels vérifiant la relation de récurrence $(*)$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $(u_{n+1}, u_n) = \varphi_{a,b}^n(u_1, u_0)$.
   b) Soit λ et μ les coordonnées de (u_1, u_0) dans (f_1, f_2). Montrer en utilisant les deux questions précédentes que pour tout $n \geq 0$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

Exercice 6
Pour tout réel s on note $R(s)$ la matrice $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} s & \operatorname{sh} s \\ \operatorname{sh} s & \operatorname{ch} s \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tous réels s et t, $R(s+t) = R(s)R(t)$.

Exercice 7
Pour tout a réel, on note $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

1) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ la formule suivante :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n + \binom{n}{n-2}a^{n-2} + \binom{n}{n-4}a^{n-4} + \cdots & na^{n-1} + \binom{n}{n-3}a^{n-3} + \binom{n}{n-5}a^{n-5} + \cdots \\ na^{n-1} + \binom{n}{n-3}a^{n-3} + \binom{n}{n-5}a^{n-5} + \cdots & a^n + \binom{n}{n-2}a^{n-2} + \binom{n}{n-4}a^{n-4} + \cdots \end{pmatrix}$$

2) Obtenir les mêmes formules par une preuve directe, en ayant préalablement remarqué que :

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Dans cette question on suppose $a > 1$ et on note : $u = \operatorname{Argth}(\frac{1}{a}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}\right)$.
   a) Vérifier que $\operatorname{ch} u = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ et $\operatorname{sh} u = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ puis que $A = \dfrac{1}{\operatorname{sh} u}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix}$.
   b) En utilisant l'exercice précédent, donner encore une autre preuve de l'expression de A^n proposée à la question 1.

Exercice 8
Soit A la matrice carrée (2,2) définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $A^2 = 2A + 15I$.

2) Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$.

3) Montrer qu'il n'y a qu'un seul couple d'entiers (a_n, b_n) pour lequel $A^n = a_nA + b_nI$.

4) Calculer $(A+3I)^2$ et $(A-5I)^2$ comme combinaison de A et I. Exprimer ensuite de la même façon $(A+3I)^n$ et $(A-5I)^n$ pour un entier n quelconque supérieur ou égal à 1.

5) En utilisant le regroupement :

$$A = \frac{5}{8}(A+3I) + \frac{3}{8}(A-5I)$$

déterminer les entiers a_n et b_n.