Mesure de Haar

Antoine Pizzolato
Encadré par Julien Melleray

Table des matières

1 Lemme de Zorn **3**

2 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences **4**
2.1 Le théorème de Hahn-Banach 4
2.2 Conséquences du théorème de Hahn-Banach 5

3 Compléments de topologie **7**
3.1 Espace métrique parfait 7
3.2 Complété d'un espace métrique 7
3.3 Topologie initiale 8
3.4 Topologie produit 9
3.5 Topologie quotient 10
3.6 Filtres et ultrafiltres 10
3.6.1 Définitions, propriétés 10
3.6.2 Utilisation des filtres en topologie 11
3.7 Compacité locale 13
3.8 Compactification d'Alexandroff 14

4 Cube de Hilbert et espace de Cantor **16**
4.1 Cube de Hilbert 16
4.2 Espace de Cantor 16

5 Duaux d'espaces de fonctions continues **21**
5.1 Compléments en théorie de la mesure 21
5.1.1 Régularité des mesures 21
5.1.2 Théorème d'extension de Carathéodory 23
5.2 Théorème de Riesz pour les espaces compacts 23
5.3 Théorème de Riesz pour les espaces localement compacts 26

6 Groupes localement compacts **27**
6.1 Groupes topologiques 27
6.2 Nombres p-adique 30
6.2.1 Définition et propriétés 30
6.2.2 Limite inverse 31
6.3 Mesure de Haar 32
6.3.1 Définitions et propriétés 32
6.3.2 Existence et (presque) unicité 32
6.3.3 Calculs de mesures de Haar 35
6.4 Fonction modulaire 36

7 Applications **40**
7.1 Espaces homogènes 40
7.2 Représentations unitaires 42

Chapitre 1

Lemme de Zorn

Définition 1.1
Soit X un ensemble.
On appelle ordre sur X une relation binaire $\leq$ vérifiant :
i) $\forall x \in X, x \leq x$ *(reflexivité).*
ii) $\forall x, y, z \in X, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$ *(transitivité).*
iii) $\forall x, y \in X, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$.

Définition 1.2
i) On dit qu'un ordre $\leq$ est total sur X lorsque : $\forall x \neq y \in X, x < y$ *ou* $y < x$.
ii) On dit qu'une partie A de X est totalement ordonnée lorsque $\leq$ définit un ordre total sur A.
iii) On dit que $x \in X$ est un majorant de A lorsque : $\forall a \in A, a \leq x$.
iv) $m \in X$ *est dit maximal lorsque :* $\forall x \in X, m \not< x$.
v) X est dit inductif lorsque toute partie totalement ordonnée admet un élément maximal.

Lemme 1.3 (Lemme de Zorn)
Tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal.

Le lemme de Zorn est une version équivalente de l'axiome du choix qui permet notamment des preuves d'existence non constructives. On l'utilisera par exemple dans la preuve du théorème de Hahn-Banach ou dans l'existence d'ultrafiltres non principaux. Il est aussi utilisé pour montrer que tout corps admet une cloture algébrique.
On peut souligner l'utilisation de l'axiome du choix pour montrer que tout espace vectoriel admet une base.

Chapitre 2

Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

2.1 Le théorème de Hahn-Banach

Définition 2.1
Soit E un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*
On appelle semi-norme sur E une application $N : E \to \mathbf{R}$ *vérifiant :*
i) $\forall x \in E, N(x) \geq 0$.
ii) $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
iii) $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition 2.2
Soit E un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*
On appelle sous-norme sur E une application $N : E \to \mathbf{R}$ *vérifiant :*
i) $\forall x \in E, N(x) \geq 0$.
ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+, \forall x \in E, N(\lambda x) = \lambda N(x)$.
iii) $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Théorème 2.3 (Théorème de Hahn-Banach, forme analytique forte)
Soient E un espace vectoriel réel, G un sous-espace vectoriel de E et p une sous-norme sur E.
Soit $\varphi_0 \in G'$ *vérifiant* $\forall x \in G, \varphi_0(x) \leq p(x)$.
Alors il existe une forme linéaire $\varphi \in E'$ *prolongeant* φ_0 *et vérifiant :* $\forall x \in E, \varphi(x) \leq p(x)$.

Preuve. On pose $B = \{\psi \in D'_\psi : D_\psi$ sev de E contenant G $, \psi_{|G} = \varphi_0, \forall x \in H, \psi(x) \leq p(x)\}$ et le munit de la relation d'ordre $\prec$ définie par : $\psi_1 \prec \psi_2 \iff (D_{\psi_1} \subset D_{\psi_2}$ et $\psi_{2|D_{\psi_1}} = \psi_1)$. B est non vide car $\varphi_0 \in B$.
Soit Q une partie totalement ordonnée de B, on pose : $H_m = \cup_{\psi \in Q} D_\psi$ et $\psi_m(x) = \psi(x)$ pour $x \in D_\psi, \psi \in Q$.
Q est totalement ordonnée donc H_m est un sous-espace vectoriel de E, $\psi_m : H \to \mathbf{R}$ est bien définie et est une forme linéaire sur H_m. ψ_m est un majorant de Q donc B est inductif.
Par lemme de Zorn, il existe φ un élément maximal de B. Il reste à montrer que $D_\varphi = E$.
Par l'absurde, on suppose que $D_\varphi \neq E$. On considère alors $x_0 \in E \setminus D$.
On cherche $\alpha \in \mathbf{R}$ tel qu'en posant $\begin{cases} H = D + \mathrm{Vect}(x_0) \\ \psi(x + tx_0) = \varphi(x) + t\alpha, x \in D, t \in \mathbf{R} \end{cases}$, alors $\psi \in B$. On contredirait ainsi la maximalité de φ.
On remarque que $\psi \in B \iff \forall x \in D, t \in \mathbf{R}, \varphi(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$
Or $\varphi(x) + t\alpha = \begin{cases} t(\varphi(\frac{x}{t}) + \alpha) \leq tp(\frac{x}{t} + x_0) = p(x + tx_0), \text{si } t > 0 \\ -t(\varphi(\frac{-x}{t}) - \alpha) \leq -tp(\frac{-x}{t} - x_0) = p(x + tx_0), \text{si } t < 0 \end{cases}$ et si $t = 0$, alors $\varphi(x) \leq p(x)$ car $\varphi \in B$. Donc il suffit d'avoir $\begin{cases} \varphi(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \\ \varphi(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \end{cases}$
Donc on veut pouvoir choisir α de tel sorte que $\sup_{x \in D} \varphi(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D} p(x + x_0) - \varphi(x)$
On peut choisir un tel α car $\forall x, y \in D, \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0)$ □

Théorème 2.4 (Théorème de Hahn-Banach, forme analytique)
Soient E un $\mathbf{R}$*-espace vectoriel,G un sous-espace vectoriel de E et p une semi-norme sur E.*

Soit $\varphi_0 \in G'$ vérifiant : $\forall x \in G, |\varphi_0(x)| \leq p(x)$.
Alors il existe une forme linéaire $\varphi \in E'$ prolongeant φ_0 et vérifiant : $\forall x \in E, |\varphi(x)| \leq p(x)$.

Preuve. Ce théorème découle directement du théorème 2.3 :
Si p est une semi-norme, alors $\forall x \in E, p(-x) = p(x)$.
En appliquant 2.3, on obtient $\forall x \in E, \varphi(x) \leq p(x)$ mais on a alors $\forall x \in E, |\varphi(x)| \leq p(x)$. □

2.2 Conséquences du théorème de Hahn-Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Théorème 2.5
Soient G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 \in G'$ continue.
φ_0 se prolonge en une forme linéaire continue sur E (avec la même norme).

Preuve. Pour $x \in E$, on pose $p(x) = \|\varphi_0\|_{E'}\|x\|$. φ_0 est continue donc $\forall x \in G, |\varphi_0(x)| \leq p(x)$.
On peut donc appliquer le théorème de Hahn-Banach forme analytique : il existe une forme linéaire φ prolongeant φ_0 telle que : $\forall x \in E, |\varphi(x)| \leq p(x)$ donc φ est continue. □

Théorème 2.6
Soit $x \in E \setminus \{0\}$.
$\exists \varphi \in E^* : \|\varphi\|_{E^*} = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$

Preuve. On pose $p = \|\cdot\|, G = \text{Vect}(x), \varphi_0 : G \to K : \lambda x \mapsto \lambda\|x\|$.
$\forall y = \lambda x \in G, |\varphi_0(y)| = |\lambda|\|x\| = \|y\| \leq p(y)$ donc par théorème de Hahn-Banach forme analytique : $\exists \varphi \in E^*$ prolongeant φ_0 telle que $\forall y \in E, \varphi(y) \leq p(y) = \|y\|$
On a donc $\|\varphi\|_{E^*} \leq 1$. Or $\varphi(x) = \varphi_0(x) = \|x\|$ donc $\|\varphi\|_{E^*} \geq 1$ puis $\|\varphi\|_{E^*} = 1$. □

Corollaire 2.7
Pour $A \subset E$, on pose $A^\circ = \{\varphi \in E^* : \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$.
On a alors :
$A^\circ = E'$ si et seulement si $A = \{0\}$.

Preuve. On suppose que $A^\circ = E'$.
Soit $x \in A$.
Si $x \neq 0$, alors il existe $\varphi \in E', \|\varphi\|_{E'} = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$. Or $A^\circ = E'$ donc $\varphi \in A^\circ$ et $\|x\| = 0$.
Si $A = \{0\}$, alors $A^\circ = E'$ car toute forme linéaire est nulle en 0. □

Corollaire 2.8
E' sépare les points de E.

Preuve. Soit $x_1 \neq x_2 \in E$.
$x_1 - x_2 \neq 0$ donc : $\exists \varphi \in E', \|\varphi\| = 1, \varphi(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0$. □

Corollaire 2.9
Soit $x \in E$.
$\|x\| = \max \|\varphi\|_{E'} \leq 1 |\varphi(x)|$

Preuve. $\forall \varphi \in E', |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{E'}\|x\|$ donc $\forall \varphi \in E'$ telle que $\|\varphi\|_{E'} \leq 1, |\varphi(x)| \leq \|x\|$ puis $\sup_{\|\varphi\|_{E'} \leq 1} |\varphi(x)| \leq \|x\|$.
Si $x \neq 0$, alors $\exists \varphi \in E' : \|\varphi\|_{E'} = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$ donc $\|x\| =\leq \sup_{\|\varphi\|_{E'} \leq 1} |\varphi(x)|$.
La borne supérieure est atteinte, donc c'est même un maximum. □

Corollaire 2.10
L'application canonique $i : E \to E'' : x \to \tilde{x}$ avec $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x), \varphi \in E'$ est une isométrie linéaire.

Remarque 2.11
i est une isométrie donc est injective.

Preuve. Soit $x \in E$.
$\|i(x)\|_{E''} = \sup_{\|\varphi\|_{E'} \leq 1} |\tilde{x}(\varphi)| = \|x\|$ □

Théorème 2.12
Soient F un sev fermé de E et $x_0 \notin F$.
$\exists \varphi \in E' : \varphi(x_0) = 1$ et $\forall x \in F, \varphi(x) = 0$

Preuve. On pose $G = F + \mathbf{K}x_0$ et $\varphi_0 : G \to \mathbf{K}$ telle que $\forall x \in F, \lambda \in \mathbf{K}, \varphi(x + \lambda x_0) = \lambda$
$\forall x \in F, \varphi_0(x) = 0$ et F est fermé donc $\delta = d(x_0, F) > 0$.
$|\varphi_0(x + \lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{\delta} d(\lambda x_0, F) \leq \frac{1}{\delta}\|x + \lambda x_0\|$ donc on peut prolonger φ_0 en φ. □

Corollaire 2.13
Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé est l'intersection des hyperplans fermés le contenant.

Corollaire 2.14
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$x_0 \in F$ *si et seulement si* $\forall \varphi \in E', \forall x \in F, \varphi(x) = 0 \implies \varphi(x_0) = 0$.
En particulier, F est dense dans E si et seulement si $\forall \varphi \in E', (\forall x \in F, \varphi(x) = 0 \implies \varphi = 0)$.

Chapitre 3

Compléments de topologie

3.1 Espace métrique parfait

Théorème 3.1
Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$.
Les trois conditions suivantes sont équivalents :
i) $\{x\}$ est un ouvert de (X, d).
ii) $\exists r > 0 : \mathcal{B}(x, r) = \{x\}$.
iii) Il existe un ouvert fini contenant x.
Un tel x est appelé un point isolé.

Preuve. i) $\implies$ ii) : $\exists r > 0 : \mathcal{B}(x, r) \subset \{x\}$ donc $\mathcal{B}(x, r) = \{x\}$
ii) $\implies$ iii) : $\{x\}$ est un ouvert fini contenant x
iii) $\implies$ i) : Soit U un ouvert fini contenant x. $x \in U$ donc $\exists r > 0 : \mathcal{B}(x, r) \subset U$ mais U est fini donc $\mathcal{B}(x, r)$ aussi.
On pose alors $r = \frac{1}{2} \min\{d(x, y) : y \in U\}$ et on a $\mathcal{B}(x, r) = \{x\}$ donc $\{x\}$ est ouvert. □

Définition 3.2
Un espace métrique est dit parfait s'il n'a pas de point isolé.

3.2 Complété d'un espace métrique

Proposition 3.3
Soit (X, d_X) un espace métrique
Il existe un espace métrique (Y, d_Y) complet avec $f : X \to Y$ une isométrie et $f(X)$ dense dans Y. (Y, d_Y) est unique à une isométrie bijective près.

Preuve. [de l'unicité] On suppose qu'on a deux complétés (Y, d_Y) et (Z, d_Z) avec $f : X \to Y, g : X \to Z$ isométries telles que $f(X)$ dense dans Y et $g(X)$ dense dans Z. On pose alors $i : (f(X), d_Y) \to (Z, d_Z) : f(x) \mapsto g(x)$.
$\forall x, y \in X, d_Z(i \circ f(x), i \circ f(y)) = d_Z(g(x), g(y)) = d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ donc i est une isométrie.
(Z, d_Z) est complet, $f(X)$ est dense dans Y et i est uniformément continue donc on peut prolonger i en une isométrie $i : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ d'image dense dans Z.
Or $(i(Y), d_Z)$ est complet car si $(i(y_n))_n$ est une suite de Cauchy dans $(i(Y), d_Z)$, alors $(y_n)_n$ converge vers y dans (Y, d_Y) donc $(i(y_n))_n$ converge dans $(i(Y), d_Z)$.
En particulier $i(Y)$ est fermé donc $\overline{i(Y)} = i(Y)$ mais comme $\overline{i(Y)} = Z$, on obtient $i(Y) = Z$. Donc i est une isométrie bijective.
(Y, d_Y) est appelé complété de (X, d_X). □

Preuve. [de l'existence] Méthode 1 :
Soient $\delta : (X, d_X) \to (C_b(X, \mathbf{R}), d_\infty)$ telle que $\forall x \in X, \delta(x) : y \to d_X(y, x) - d_X(y, x_0)$, $x_0 \in X$ fixé et $y \in X$
$|\delta(x)(y)| = |d_X(y, x) - d_X(y, x_0)| \leq d(x, x_0)$ donc $\delta(x)$ est bien à valeurs dans $C_b(X, \mathbf{R})$
Soient $x, x', y \in X$.
$|\delta(x)(y) - \delta(x')(y)| = |d(y, x) - d(y, x')| \leq d(x, x')$ donc $d_\infty(\delta(x), \delta(x')) \leq d(x, x')$ et avec $y = x'$, on obtient $d_\infty(\delta(x), \delta(x')) = d(x, x')$ donc δ est une isométrie. $(C_b(X, \mathbf{R}), d_\infty)$ est complet donc $(\overline{\delta(X)}, d_\infty)$ est complet et $\delta(X)$ est dense dans $\overline{\delta(X)}$.

Méthode 2 :
On veut ajouter une limite à toute suite de Cauchy de X qui ne converge pas.
Soient $(u_n), (v_n) \in X^{\mathbf{N}}$ deux suites de Cauchy
$(d(u_n, v_n))$ est de Cauchy dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ donc $d(u_n, v_n) \to_n \rho(u, v)$. On pose $Z = \{$ suites de Cauchy d'éléments de X $\}$
Pour $u, v \in Z$, on pose $\rho(u, v) = \lim_n d(u_n, v_n)$ et $\delta : X \to Z : x \mapsto (x, x, ...)$.
Si (u_n) est de Cauchy dans X, $\rho(\delta(u_n), u) = \lim_i d(u_n, u_i) \to_n 0$
$\rho(u, u) = 0$ et $\rho(u, w) \leq \rho(u, v) + \rho(v, w)$.
On pose $Y = Z/\sim$ avec $u \sim v$ si $\rho(u, v) = 0$. Alors (Y, ρ) est un espace métrique, X est dense dans (Y, ρ) et toute suite de Cauchy d'éléments de X converge dans Y.
Soient $(y_n)_n \in Y^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans (Y, ρ) et $\epsilon > 0$.
X est dense dans Y donc $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in X : d(x_n, y_n) < \epsilon$. Mais alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X donc converge vers $x \in Y$. $\forall n \in \mathbf{N}, d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) < \epsilon + d(x_n, x)$ et $d(x_n, x) \to_n 0$ donc $(y_n)_n$ converge vers x. Donc (Y, ρ) est complet. □

Exemple 3.4
On pose $G = \{(x, \sin(x)) : x \in \mathbf{R}\}$ et on le munit de la $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $f : \mathbf{R} \to G, x \mapsto (x, \sin(x))$.
f est une isométrie bijective de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ dans $(G, \|\cdot\|_\infty)$ donc (G, f) est aussi un complété de $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$.

3.3 Topologie initiale

Définition 3.5
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.
On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X ou une base de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Définition 3.6
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$.
On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset V$.

Proposition 3.7
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.
ii) Pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Preuve. *i)* $\implies$ *ii)* :
Soient $U \in \mathcal{T}, x \in U$.
Il existe une famille $(B_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \cup_{j \in J} B_j$. Donc il existe $j \in J$ tel que $x \in B_j \subset U$.
ii) $\implies$ *i)* :
Soit U un ouvert non vide de X.
$\forall x \in U, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset U$. On a donc $U = \cup_{x \in U} \{x\} = \cup_{x \in U} B_x$. Donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. □

Proposition 3.8
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X.
Alors $\mathcal{B}$ possède les deux propriétés suivantes :
i) $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U$.
ii) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in U_1 \cap U_2, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset U_1 \cap U_2$.
Réciproquement, si X est un ensemble et $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant i) et ii), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base et $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U$ soit réunuion d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}\}$.
Autrement dit, $U \subset X$ est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si $\forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

Proposition 3.9
Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I, f : X \to Y_i$ une application.
On pose $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ pour $i \in I$ et U_i ouvert de Y_i.
Il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. Elle est appelée topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i \in I}$.

Preuve. $\mathcal{B}$ vérifie les deux propriétés d'une base d'ouverts donc il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. □

Lemme 3.10
Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \to Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.
1) Pour $x \in X$, on obtient une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts pour $\mathcal{T}$ en considérant les ensembles de la forme $\cap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j)$ avec J un sous-ensemble fini de I et U_i un ouvert de Y_i contenant $f_i(x)$.
2) Si pour tout $i \in I, \mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i et si $\mathcal{B}'$ est l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ ou $i \in I$ et $U_i \in \mathcal{B}_i$, alors $\mathcal{B}'$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$.

Preuve. 1) On pose $\mathcal{B}_x = \{\cap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) : J \subset I$ fini et U_j ouvert de Y_j contenant $f_j(x)\}$.
Soit V un voisinage de x.
Il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset V$. Mais il existe $\cap_{j\in J\subset I \text{ fini}} f_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}$ tel que $x \in \cap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) \subset U \subset V$, d'ou le résultat.
2) Soient $U \in \mathcal{T}, x \in U$.
Il existe $B = \cap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.
Or $\forall j \in J, U_j$ est un ouvert de Y_j donc $\exists B_j \in \mathcal{B}' : f_j^{-1}(x) \in B_j \subset U_j$.
Donc $x \in \cap_{j\in J} f_j^{-1}(B_j) \subset U$ et $\cap_{j\in J} f_j^{-1}(B_j) \in \mathcal{B}'$. □

Proposition 3.11
Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \to Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.
1) La topologie $\mathcal{T}$ est la moins fine sur X rendant continues toutes les applications f_i.
2) La topologie $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur X ayant la propriété universelle de la topologie initiale : pour tout espace topologique E, $g : E \to X$ est continue si et seulement si $\forall i \in I, f_i \circ g$ est continue.

Preuve. 1) Par construction, $\mathcal{T}$ rend continue toutes les applications f_i. Si $\mathcal{T}'$ est une topologique rendant continue toutes les applications f_i, alors pour tout $i \in I$ et U_i ouvert de Y_i, $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}'$ donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
2) Si g est continue, alors $\forall i \in I, f_i \circ g$ est continue.
On suppose que $\forall i \in I, f_i \circ g$ est continue.
Soient $a \in E$ et V un voisinage de $g(a)$.
Alors il existe $J \subset I$ fini et U_j ouvert de Y_j contenant $f_j \circ g(a)$ tel que $\cap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) \subset V$. Donc $\cap_{j\in J} g^{-1}(f_j^{-1}(U_j)) \subset g^{-1}(V)$ puis $\cap_{j\in J}(f_j \circ g)^{-1}(U_j) \subset g^{-1}(V)$ mais par hypothèse, les $f_i \circ g$ sont continues donc $\forall j \in J, (f_j \circ g)^{-1}(U_j)$ est ouvert donc $\cap_{j\in J}(f_j \circ g)^{-1}(U_j)$ aussi et $g^{-1}(V)$ est un voisinage de a.
Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X ayant cette propriété.
$\forall i \in I, f_i \circ id = f_i$ donc $id : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ est continue puis $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
De même, $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ est continue donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ puis $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

3.4 Topologie produit

Définition 3.12
Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
On pose $X = \Pi_{i\in I} X_i$.
La topologie la moins fine rendant continues toutes les projections $p_i : X \to X_i$ est appelée la topologie produit.

Proposition 3.13
Pour tout ouvert U_i de X_i, on a $p_i^{-1}(U_i) = U_i \times \Pi_{j\neq i} X_j$ donc une intersection finie d'ouverts de la forme $p_i^{-1}(U_i)$ avec U_i ouvert dans X_i est un ouvert de X de la forme $\Pi_{i\in I} U_i$ ou U_i est ouvert dans X_i pour tout $i \in I$ et $U_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. On appelle ces ouverts des ouverts élémentaires.
Les ouverts élémentaires forment une base de la topologie produit sur X

Proposition 3.14
1) $\forall i \in I, p_i : X \to X_i$ est une application continue et ouverte.
2) La topologie produit sur X est l'unique topologique ayant la propriété universelle de la topologie produit : pour tout espace topologie E, une application $g : E \to X$ est continue si et seulement si $\forall i \in I, f_i \circ g$ est continue.

Preuve. 1) Soit $U = \Pi_{i\in I} U_i$ avec $U_i = X_i$ sauf pour un nombre finie d'ouverts.
Alors $p_j(U) = U_j$ ouvert. Donc p_i est ouverte.
2) Cas particuliers de la propriété universelle de la topologie initiale. □

3.5 Topologie quotient

Définition 3.15
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.
On note $X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ et pour $x \in X$, on note $[x]$ la classe de x.
Soit $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la surjection canonique.
On pose $\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}} = \{U \subset X/\mathcal{R} : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$. $\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$ est une topologie et on l'appelle la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$.

Vérifions que $\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$ est bien une topologie.
i) $\emptyset, X/\mathcal{R} \in \mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$.
ii) Soient $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$.
$\pi^{-1}(\cap_{i=1}^n U_i) = \cap_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$.
iii) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$.
$\pi^{-1}(\cup_{i\in I} U_i) = \cup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$.

Exemple 3.16
On munit $\mathbf{R}$ de la relation d'équivalence $\sim$ définie par $x \sim y \iff x - y \in \mathbf{Q}$. On note $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$ et on munit $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ de la topologie quotient.
$\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ muni de la topologie quotient n'est pas séparé :
On note $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Q}$ la surjection canonique.
Soit F un fermé non vide de $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$.
Donc il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $\pi(x) \in F$. Mais alors $\forall r \in \mathbf{Q}, x+r \in \pi^{-1}(F)$ car $\pi(r) = 0$. Donc $x+\mathbf{Q} \subset \pi^{-1}(F)$.
$x + \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ et $\pi^{-1}(F)$ est fermé donc $\pi^{-1}(F) = \mathbf{R}$ puis $F = \mathbf{R}/\mathbf{Q}$.
Donc la topologie quotient sur $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ est la topologie grossière et n'est donc pas séparé.

3.6 Filtres et ultrafiltres

3.6.1 Définitions, propriétés

Définition 3.17
Soit X un ensemble infini.
Un filtre sur X est une famille non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant :
i) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.
ii) $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B \implies B \in \mathcal{F}$.
iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Exemple 3.18
i) $\{X\}$ est un filtre.
ii) $\forall x \in X, \mathcal{F}_x = \{A \subset X : x \in A\}$ est un filtre.
iii) Pour toute partie non vide S de X, l'ensemble des parties qui contiennent S est un filtre, un tel filtre est appelé un filtre principal.
iv) $\mathcal{F} = \{A \subset X : X \setminus A$ est fini$\}$ est un filtre non principal appelé filtre de Fréchet.

Proposition 3.19
Si un filtre contient une partie finie, alors il est principal.

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ un filtre contenant une partie finie. On considère A une partie finie de $\mathcal{F}$ de cardinal minimum.
Soit $B \in \mathcal{P}(X)$ contenant A. Alors $A \subset B$ et $A \in \mathcal{F}$ donc $B \in \mathcal{F}$.
Soit $B \in \mathcal{F}$.
Alors $A \cap B \in \mathcal{F}$ mais $A \cap B \subset A$ donc $|A \cap B| \leq |A|$. Par minimalité de $|A|$, on a $B \cap A = A$ donc $A \subset B$.
Donc $\mathcal{F}$ est un filtre principal. □

Définition 3.20
On dit qu'une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une base de filtre si toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ sont non vides.

Proposition 3.21
Pour toute base de filtre $\mathcal{A}$, il existe un filtre contenant $\mathcal{A}$.
Le plus petit filtre contenant $\mathcal{A}$ est $\mathcal{F} = \{B \subset X : \exists A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} : \cap_{i=1}^n A_i \subset B\}$ (ensemble des parties qui contiennent une intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$).

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une base de filtre. $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{A}$ et si un filtre contient $\mathcal{A}$, alors il contient $\mathcal{F}$. Montrons que $\mathcal{F}$ est un filtre.
$\mathcal{F}$ est stable par intersections finies et si B contient un élément de $\mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{F}$. $\mathcal{A}$ est une base de filtre donc les intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ sont non vides. $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est un filtre. □

Exemple 3.22
Soit I un ensemble infini.
On pose X l'ensemble des parties finies de I.
La famille $\mathcal{B}$ des parties de la forme $\{A \in X : F \subset A\}$ avec F une partie finie non vide de X, est une base de filtre sur X.

Définition 3.23
On dit que filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si pour tout filtre $\mathcal{G}, \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \implies \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Remarque 3.24
Les ultrafiltres sont donc les filtres maximaux pour l'inclusion.
L'ensemble des filtres contenant un filtre donné, ordonné par l'inclusion est un ensemble ordonné inductif donc le lemme de Zorn garantit l'existence d'ultrafiltres contenant un filtre donné.

Proposition 3.25
Un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si $\forall A \in X, A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Preuve. On suppose que $\mathcal{F}$ est un filtre tel qu'il existe $A \in X$ vérifiant $A, X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Montrons qu'alors $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est une base de filtre.
Soient $B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}$.
Si $B_1 \cap ... \cap B_n \cap A = \emptyset$, alors $B_1 \cap ... \cap B_n \subset X \setminus A$ donc $X \setminus A \in \mathcal{F}$: absurde. Donc $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est une base de filtre, il existe alors un filtre contenant $\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un filtre qui n'est pas un ultrafiltre. Alors il existe $\mathcal{G}$ un filtre contenant strictement $\mathcal{F}$: il existe $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Alors $A, X \setminus A \notin \mathcal{F}$. □

Proposition 3.26
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre.
Soit $\mathcal{U}$ contient le filtre de Fréchet sur X soit il est principal.

Preuve. On pose $\mathcal{F} = \{A \subset X : X \setminus A$ est de cardinal fini $\}$.
Si $\mathcal{U}$ contient une partie finie, alors $\mathcal{U}$ est un filtre principal.
Sinon :
Soit $A \in \mathcal{F}$.
$X \setminus A$ est de cardinal fini donc A est de cardinal infini (on rappelle qu'on considère des filtres sur des ensembles infinis). Mais $\mathcal{U}$ ne contient pas de partie finie et c'est un ultrafiltre donc $A \in \mathcal{U}$ (car $X \setminus A \notin \mathcal{U}$). □

3.6.2 Utilisation des filtres en topologie

Définition 3.27
Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $x \in X$.
On dit que $\mathcal{F}$ converge vers x si $\mathcal{F}$ contient le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x.

Proposition 3.28
Soit X un espace topologique.
X est séparé si et seulement si tout filtre convergent sur X a une unique limite.

Preuve. On suppose que X est séparé
Soit $\mathcal{F}$ un filtre convergent sur X vers x
$\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}$
Soit x' une limite du filtre $\mathcal{F}$ différente de x
Il existe U, U' deux ouverts de X tels que $U \cap U' = \emptyset, x \in U, x' \in U'$
$\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_{x'} \subset \mathcal{F}$ donc $U, U' \in \mathcal{F}$ puis $U \cap U' \in \mathcal{F}$ ce qui est absurde car $U \cap U' = \emptyset$
On suppose que tout filtre convergent sur X a une unique limite
Si X n'est pas séparé, il existe $x \neq x' \in X$ tel que pour tout ouvert U contenant x et Vcontenant y, $U \cap V \neq \emptyset$.
On pose alors $B = \{U \cap V : U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$. B est une base de filtre, on note $\mathcal{F}$ le filtre enegendré par B
$\mathcal{F} \to x$ et $\mathcal{F} \to x'$ ce qui n'est pas possible, donc X n'est pas séparé. □

Définition 3.29
Soient X,Y deux ensembles,$\mathcal{F}$ un filtre sur X et $f : X \to Y$ une fonction.
$\{B \subset Y : \exists A \in \mathcal{F}$ tel que $B = f(A)\}$ est une base de filtre et on appelle filtre image de $\mathcal{F}$ par f le filtre engendré par cette base de filtre.

Remarque 3.30
A appartient au filtre image de $\mathcal{F}$ par f si et seulement si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Définition 3.31
Soient X un ensemble non vide, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $f : X \to Y$ une application de X dans un espace topologique Y.
On dit que $l \in Y$ est limite de f suivant le filtre $\mathcal{F}$ lorsque le filtre image $f(\mathcal{F})$ converge vers l.

Le lien entre la convergence de filtres et la convergence de suite est établi par la proposition suivante.

Proposition 3.32
Soient Y un espace topologique et $l \in Y$.
Soit $f : \mathbf{N} \to Y$ une application. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $y_n = f(n)$.
$(y_n)_n$ converge vers l si et seulement si l est la limite de f suivant le filtre de Fréchet.

Preuve. On rappelle que le filtre de Fréchet sur $\mathbf{N}$ est $\mathcal{F} = \{I \subset \mathbf{N} : I^c$ est fini $\}$.
On suppose que $(y_n)_n$ converge vers l.
Soit V un voisinage de l dans Y.
Alors il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N, y_n \in V$. On pose alors $I = \{n \in \mathbf{N} : n \geq N\}$. $I \subset f^{-1}(V)$ donc $f^{-1}(V)^c \subset I^c$ qui est fini donc $f^{-1}(V) \subset \mathcal{F}$. Donc $f(\mathcal{F})$ converge vers l.
Réciproquement, on suppose que l est la limite de $\mathcal{F}$ suivant le filtre de Fréchet.
Soit V un voisinage de l dans Y.
Alors V appartient au filtre image de $\mathcal{F}$ par f, $I = f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$.
I^c est fini et $I^c = (f^{-1}(V))^c = f^{-1}(V^c)$ donc il n'y a qu'un nombre fini d'entiers dont l'image n'est pas dans V, c'est à dire : il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N, f(n) = y_n \in V$. Donc $(y_n)_n$ converge vers l. □

Proposition 3.33
Le filtre image d'un ultrafiltre sur X est un ultrafiltre sur Y.

Preuve. Soit $f : X \to Y$ une fonction et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X.
$f(\mathcal{U})$ est un filtre, montrons que c'est un ultrafiltre
Soit $A \subset Y$ n'appartenant pas à $f(\mathcal{U})$. Donc $f^{-1}(A) \notin \mathcal{U}$. Or $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre donc $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ donc $f^{-1}(Y \setminus A) \in \mathcal{U}$ puis $Y \setminus A \in \mathcal{U}$
Donc $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre □

Proposition 3.34
Soient X, Y deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \to Y$ une fonction.
f est continue en x si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ qui converge vers x, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.

Preuve. On suppose f continue.
Soient $\mathcal{F}$ un filtre qui converge vers x et V un voisinage de $f(x)$.
f est continue donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Or $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}$ donc $f^{-1}(V) \subset \mathcal{V}_x$ puis $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Donc $V \in f(F)$
On suppose que pour tout filtre $\mathcal{F}$ qui converge vers x, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.
Soit V un voisinage de $f(x)$.
$\mathcal{V}_x \to x$ donc $f(\mathcal{V}_x) \to f(x)$. $V \in f(\mathcal{V}_x)$ donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$. □

Proposition 3.35
Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.
On pose $X = \Pi_i X_i$ qu'on munit de la topologie produit.
Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est convergent si et seulement si $\forall i \in I, \pi_i(\mathcal{F})$ est convergent .

Preuve. Si $\mathcal{F}$ est un filtre convergent sur X, alors $\forall i \in I, \pi_i(\mathcal{F})$ converge car π_i est continue.
On suppose maintenant que $\forall i \in I, \pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $x_i \in X_i$. Montrons que $\mathcal{F}$ converge vers $x = (x_i)_{i \in I}$.
Soit U un voisinage de x. On peut supposer que U est de la forme $U = \{y \in X : \forall j \in J, \pi_j(y) \in U_j\}$ avec $J \subset I$ une partie finie et U_j ouvert de X_j.
$\forall i \in I, \pi_i(\mathcal{F})$ converge vers x_i donc c'est le cas pour tout élément de j donc $\forall j \in J, \mathcal{V}_{x_j} \subset \pi_j(\mathcal{F})$. $\forall j \in J, U_j \in \pi_j(\mathcal{F})$ donc $\exists V_j \in \mathcal{F} : \pi_j(V_j) \subset U_j$.

On pose alors $V = \cap_{j\in J} V_j$.
$V \in \mathcal{F}$ et $\forall j \in J, \pi_j(V) \subset \pi_j(V_j) \subset U_j$ donc $V \subset U$ puis $V \in \mathcal{F}$.
Donc $\mathcal{F}$ converge vers x. □

Proposition 3.36
Soient X un espace topologique, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X et $x \in X$.
$\mathcal{U}$ converge vers x si et seulement si $x \in \cap\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \in \mathcal{U}, A$ fermé $\}$.

Preuve. Si $\mathcal{U}$ converge vers x, alors $\forall A \in \mathcal{U}, x \in A$.
Réciproquement, si x appartient à l'intersection des éléments de $\mathcal{U}$ qui sont fermés dans X :
Soit V un ouvert contenant x.
Si $V \notin U$, alors $X \setminus V \in \mathcal{U}$ mais $X \setminus V$ est fermé donc $x \in X \setminus V$ ce qui est absurde. □

Proposition 3.37
Soit X un espace topologique séparé.
X est compact si et seulement si tout ultrafiltre sur X est convergent.

Preuve. On suppose que X n'est pas compact et on fixe un recouvrement ouvert (O_i) de X qui n'admet pas de sous recouvrement fini. La famille formée par les complémentaires des O_i est une base de filtre qui est donc contenue dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ ne peut converger vers aucun x car pour $x \in X, \exists i : x \in O_i$ mais $O_i \notin \mathcal{U}$ donc $\mathcal{U}$ ne peut pas converger vers x.
On suppose X compact.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X.
La famille formée par les éléments de $\mathcal{U}$ qui sont fermés dans X a une intersection non vide car X est compact et toute sous-famille finie est d'intersection non vide car $\mathcal{F}$ est un filtre. On fixe x dans cette intersection. $\mathcal{U}$ converge alors vers x. □

Proposition 3.38
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides et $X = \Pi_i X_i$ muni de la topologie produit.
X est compact si et seulement si $\forall i \in I, X_i$ est compact.

Preuve. Si X est compact, alors $\forall i \in I, \pi_i(X) = X_i$ est compact.
On suppose que $\forall i \in I, X_i$ est compact.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X.
$\forall i \in I, \pi_i(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre surX_i donc converge. Donc $\mathcal{U}$ est convergent et X est compact. □

3.7 Compacité locale

Définition 3.39
Soit X un espace topologique séparé.
On dit que X est localement compact lorsque tout point de X admet un voisinage compact.

Exemple 3.40
i) Tout espace compact est localement compact.
ii) $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ sont localement compacts.
iii) Tout espace topologique discret X est localement compact car $\forall x \in X, \{x\}$ est un voisinage compact de x.
iv) Tout espace topologique homéomorphe à un espace localement compact est localement compact.

Proposition 3.41
Soient X un espace localement compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \to Y$ une application continue surjective et ouverte.
Alors :
i) Y est localement compact.
ii) Pour tout compact K de Y, il existe un compact K' de X tel que $K = f(K')$.

Preuve. Soit $y \in Y$.
i) Il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On pose V un voisinage compact de x dans X.
Alors $f(V)$ est un voisinage de y dans Y car il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$ et f est ouverte donc $f(U)$ est un ouvert contenant y et contenu dans $f(V)$. De plus $f(V)$ est compact car V est compact et f est continue.
ii) Soit K un compact de Y.
$K_1 = f^{-1}(K)$ est fermé dans Y et $\forall x \in K_1$, il existe un ouvert U_x de X contenant x et tel que $\overline{U_x}$ soit

compact. Alors $(f(U_x))_{x\in K_1}$ est un recouvrement ouvert de K. K étant compact, il existe $x_1,...,x_n \in K_1$ tel que $K \subset \cup_{i=1}^n f(U_{x_i}) = f(\cup_{i=1}^n U_{x_i})$. Or $\overline{\cup_{i=1}^n U_{x_i}} = \cup_{i=1}^n \overline{U_{x_i}}$ donc $\overline{\cup_{i=1}^n U_{x_i}}$ est compact dans X. On pose $K' = K_1 \cap \overline{\cup_{i=1}^n U_{x_i}}$ qui est un compact de X et $f(K') \subset f(K_1) = K$ et $K \subset f(\overline{\cup_{i=1}^n U_{x_i}})$ puis $K = K \cap f(K_1) \subset f(\overline{\cup_{i=1}^n U_{x_i}}) \cap f(K_1) = f(\overline{\cup_{i=1}^n U_{x_i}} \cap K_1) = f(K')$. □

Proposition 3.42
Soient $X_1,...,X_n$ des espaces topologiques localement compacts (donc séparés).
$\Pi_{i=1}^n X_i$ est localement compact si et seulement si $\forall i \in [|1,n|], X_i$ est localement compact.

Preuve. On suppose que $\Pi_{i=1}^n X_i$ est localement compact.
Soit $i \in [|1,n|]$.
$p_i(X) = X_i$ est localement compact car p_i est continue surjective et ouverte.
On suppose que $\forall i \in [|1,n|], X_i$ est localement compact.
Soit $x = (x_1,...,x_n) \in \Pi_{i=1}^n X_i$. Pour $i \in [|1,n|]$, on considère U_i un voisinage compact de x_i. Alors $\Pi_{i=1}^n U_i$ est un voisinage compact de x dans $\Pi_{i=1}^n X_i$. Donc $\Pi_{i=1}^n X_i$ est localement compact. □

Lemme 3.43
Soient X un espace topologique séparé et A,B deux compacts disjoints de X.
Alors il existe deux ouverts disjoints U,V de X tels que $A \subset U, B \subset V$.

Preuve. Soit $b \in B$.
Comme X est séparé, $\forall a \in A$, il existe U_{ab} et V_{ab} deux ouverts disjoints de X tels que $a \in U_{ab}, b \in V_{ab}, U_{ab} \cap V_{ab} = \emptyset$. Donc $A \subset \cup_a U_{ab}$ mais A est compact donc il existe $a_1,...,a_n \in A$ tels que $A \subset \cup_{i=1}^n U_{a_i b}$.
On pose alors $U_b = \cup_{i=1}^n U_{a_i b}$ et $V_b = \cap_{i=1}^n V_{a_i b}$.
U_b et V_b sont deux ouverts de X tels que $A \subset U_b, b \in V_b$ et $U_b \cap V_b = \emptyset$. Donc $B \subset \cup_b V_b$. Mais B est compact donc il existe $b_1,...,b_p \in B$ tels que $B \subset \cup_{j=1}^p V_{b_j}$. On pose alors $U = \cap_{j=1}^p U_{b_j}$ et $V = \cup_{j=1}^p V_{b_j}$.
U et V sont deux ouverts disjoints de X tels que $A \subset U, B \subset V$. □

Théorème 3.44
Soit X un espace topologique séparé.
X est localement compact si et seulement si tout point de X admet une base de voisinages compact.

Preuve. Il suffit de montrer l'implication directe.
Montrer que tout point de X admet une base de voisinages compact revient à montrer que pour tout point x de X, et tout voisinage U_x de x dans X, il existe un voisinage compact de x tel que $x \in V \subset U_x$.
Soient $x \in X$ et U_x un voisinage compact de x.
Soient K_x un voisinage compact de x dans X et U'_x un ouvert de X tel que $x \in U'_x \subset K_x$.
Alors $W_x = U'_x \cap U_x$ est un ouvert de X tel que $x \in W_x \subset K_x \cap U_x$. On pose alors $A = K_x \setminus W_x$. A est compact et $x \notin A$. Il existe donc deux ouvert U,V de X tels que $A \subset U, x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Donc $V \subset W_x$ et $\overline{V} \cap U = \emptyset, \overline{V} \subset K_x$. Donc $x \in \overline{V} \subset W_x \subset U_x$. $\overline{V}$ est un voisinage compact de x contenu dans U_x. □

3.8 Compactification d'Alexandroff

Un espace localement compact est un espace qui possède "beaucoup" de compacts et qui n'est donc pas loin d'être lui-même compact.

Définition 3.45
Soit X un espace topologique.
Une compactification de X est un couple $(\hat{X}, f)$ avec $\hat{X}$ un espace compact et f un homéomorphisme de X dans un sous-ensemble dense de $\hat{X}$.

Proposition 3.46
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace localement compact non compact.
On ajoute un point, noté ∞, à X et on pose $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ et $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\hat{X} \setminus K : K$ compact de $X\}$.
Alors $\hat{\mathcal{T}}$ est une topologie séparé sur $\hat{X}$ et l'espace topologique $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ est compact, il est appelé compactifié d'Alexandroff de X.

Preuve. i) $\emptyset, \hat{X} \in \hat{\mathcal{T}}$.
ii) Soient $U \in \mathcal{T}$ et K un compact de X.
$U \cap (\hat{X} \setminus K) = U \cap (X \setminus K) = U \setminus K \in \hat{\mathcal{T}}$.
Soient K' un autre compact de X.
$(\hat{X} \setminus K) \cap (\hat{X} \setminus K') = \hat{X} \setminus (K \cup K') \in \hat{\mathcal{T}}$ car $K \cup K'$ est un compact de X. Donc $\hat{X}$ est stable par intersection

finie.
iii) Soient $U \in \mathcal{T}$ et K un compact de X.
$U \cup (\hat{X} \setminus K) = \hat{X} \setminus ((\hat{X} \setminus K) \cap K)) \in \hat{\mathcal{T}}$. Si K' est un compact de X, alors :
$(\hat{X} \setminus K) \cup (\hat{X} \setminus K') = \hat{X} \setminus (K \cap K') \in \hat{\mathcal{T}}$ car $K \cap K'$ est un compact de X. Donc $\hat{\mathcal{T}}$ est bien une topologie sur $\hat{X}$.
Donc $\hat{\mathcal{T}}$ est bien une topologie sur $\hat{X}$. Soit $x \in X$.
On considère K un voisinage compact de x dans X. Alors K° (l'intérieur de K dans X) et $\hat{X} \setminus K$ sont deux ouverts disjoints de $\hat{X}$ séparant x et $\{\infty\}$. □

Lemme 3.47
Soient X un espace topologique séparé, Y un sous-ensemble de X localement compact pour la topologie i induite par celle de X.
1) Si Y est dense dans X, alors Y est un ouvert de X.
2) Il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $Y = U \cap F$.

Preuve. Soient $y \in Y$ et K un voisinage compact de y dans Y. □

Théorème 3.48
Soit X un espace localement compact.
Alors il existe $\hat{X}$ un espace topologique compact vérifiant :
i) X est un sous-espace de $\hat{X}$.
ii) $\hat{X} \setminus X$ est réduit à un point $\{\infty\}$.
iii) X est dense dans $\hat{X} \iff X$ n'est pas compact $\iff \infty$ n'est pas un point isolé dans $\hat{X}$.
iv) $\hat{X}$ est unique à homéomorphisme près.

Preuve. iv) Soient Y un espace compact et $g : X \to Y$ un homéomorphisme de X sur $g(X)$ tel que $Y \setminus g(X) = \{w\}$. On pose alors $h : \hat{X} \to Y : x \mapsto \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in X \\ w \text{ si } x = \infty \end{cases}$. h est bijective. De plus, X est un ouvert de $\hat{X}$ et g est continue donc donc h est continue sur X.
Soit V un voisinage ouvert de w dans Y. Alors $K = Y \setminus V$ est un compact de $Y \setminus \{w\} = g(X)$. Or g est un homéomorphisme de X dans $g(X)$ donc $\hat{X} \setminus h^{-1}(V) = g^{-1}(K)$ est un compact de X. Donc $h^{-1}(V)$ est un ouvert de $\hat{X}$ contenant ∞. Donc h est continue en ∞.

□

Exemple 3.49
1) Le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{R}$ est la sphère $\mathbf{S} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.
2) Le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{C}$ est la sphère de Riemann.
3) Le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{R}^n$ est la sphère $\mathbf{S}^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$.
Pour prouver les résultats des exemples précédents, on peut conidérer la projection stéréographique.

Le procédé de compactification d'Alexandroff nous sera très utile dans la suite pour étendre le théorème de Riesz sur les espaces compacts aux esapces localement compacts.

Chapitre 4

Cube de Hilbert et espace de Cantor

4.1 Cube de Hilbert

Définition 4.1
Le cube de Hilbert est l'espace $[0,1]^{\mathbf{N}}$ *muni de la topologie produit.*

Proposition 4.2
Le cube de Hilbert est compact.

Preuve. C'est un produit d'espaces compacts donc compact. □

Lemme 4.3
Soit (X,d) *un espace métrique.*
Si (X,d) *est compact, alors* (X,d) *est séparable.*

Preuve. Soit $n \in \mathbf{N}$.
$(\mathcal{B}(x,2^{-n}))_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X donc il existe un ensemble fini A_n tel que $X = \cup_{x\in A_n}\mathcal{B}(x,2^{-n})$.
On pose alors $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}A_n$, A est au plus dénombrable.
Soient $x \in X, \epsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $2^{-n} \leq \epsilon$.
Il existe $y \in A_n$ tel que $d(x,y) \leq 2^{-n} \leq \epsilon$ donc A est dense dans X. □

Théorème 4.4
Soit (X,d) *un espace métrique compact.*
Il existe un fermé F *du cube de Hilbert et un homéomorphisme* $g : X \to F$.

Preuve. Sans perte de généralité, on suppose que d est à valeurs dans $[0,1]$ (quitte à remplacer d par $\min(1,d)$ qui est équivalente à d).
(X,d) est un espace métrique compact donc séparable.
Soit $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans (X,d).
On pose $g : X \to [0,1]^{\mathbf{N}}$ défini par $\forall x \in X, \forall n \in \mathbf{N}, g(x)(i) = d(x,x_i)$. g est continue car $\forall i \in \mathbf{N}, x \to g(x)(i) = d(x,x_i)$ est continue. Donc $F = g(X)$ est compact puis fermé dans $[0,1]^{\mathbf{N}}$.
Soit $x \neq y \in X$.
On pose $\epsilon = d(x,y) > 0$. $\exists i \in \mathbf{N} : d(x,x_i) < \frac{\epsilon}{2}$ Donc $d(x_i,y) \geq d(x,y) - d(x_i,x) > \frac{\epsilon}{2}$ puis $d(x_i,x) < d(x_i,y)$.
$g(x) \neq g(y)$ donc g est injective.
$g : X \to F$ est bijective, X est compact donc g est un homéomorphisme. □

4.2 Espace de Cantor

Définition 4.5
On appelle espace de Cantor l'espace $C = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ *muni de la topologie produit.*

Proposition 4.6
$\{0,1\}$ *muni de la distance discrète est compact (car fini) donc C est compact en tant que produit dénombrable d'espaces compacts.*
Les suites convergentes d'éléments de $\{0,1\}$ *sont les suites stationnaires donc une suite* (x_n) *d'éléments de C converge vers* $x \in C$ *si et seulement si* $x_n(i) = x(i)$ *à partir d'un certain rang.*

Pour $x \neq y \in C$, on pose $n(x,y) = \min\{i \in \mathbf{N} : x(i) \neq y(i)\}$.
On peut définir une distance d sur C défini par : $d(x,y) = \begin{cases} 2^{-n(x,y)} \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Théorème 4.7
Soient $x, y, z \in C$.
d satisfait l'inégalité triangulaire ultramétrique : $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$.

Preuve. Soient $x, y, z \in C$.
Si $x = z$ l'inégalité est vraie.
Si $x \neq z$:
On pose $n = n(x,z)$. On ne peut pas avoir à la fois $x(n) = y(n)$ et $y(n) = z(n)$ donc $n(x,y) \leq n$ ou $n(y,z) \leq n$. Donc $2^{-n(x,z)} \geq 2^{-n}$ ou $2^{-n(y,z)} \geq 2^{-n}$.
Donc $d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(y,z))$. □

Proposition 4.8
Dans (C,d), tous les triangles sont isocèles.

Preuve. Soient (X,d) un espace ultramétrique et $x, y, z \in C$ trois points distincts
On suppose que $d(x,y)$ est la plus grande distance entre ces trois éléments.
Alors $d(x,y) \geq \max(d(x,z), d(y,z))$ et $d(x,y) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$ donc $d(x,y) = \max(d(x,z), d(y,z))$.
Au moins deux distances sont égales. □

Proposition 4.9
La distance d induit la topologie produit.

Preuve. Soit $(x_m)_m \in C^{\mathbf{N}}$ convergeant vers $x \in C$.
$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbf{N} : \forall m \geq M, d(x_m, x) = 2^{-n(x_m,x)} \leq \epsilon$. Avec $\epsilon = 2^{-p}, \exists M \in \mathbf{N} : \forall m \geq M, 2^{-n(x_m,x)} < 2^{-p}$ donc $\forall i \leq p, x_n(i) = x(i)$. Donc $\forall i \in \mathbf{N}, (x_m(i))_m$ converge vers $x(i)$.
Réciproquement, si $\forall i \in \mathbf{N}, (x_m(i))_m$ converge vers $x(i)$, alors $(x_m)_m$ converge vers x pour d. □

Définition 4.10
Pour toute suite finie $s = (s_0, s_1, ..., s_k)$ d'éléments de $\{0,1\}$, on note $N_s = \{x \in C : \forall i \leq k, x(i) = s_i\} = \{(s_0, ..., s_k, x_{k+1}, ...) : \forall i \geq k+1, x_i \in \{0,1\}\}$.

Définition 4.11
On note S l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{0,1\}$ et pour $s = (s_0, ..., s_n)$, on note $|s| = n+1$ et on l'appelle la longueur de s. On convient que $N_\emptyset = C$
Si $s = (s_0, ..., s_n), t = (s_0, ..., s_n, \epsilon)$, on note $t = s \frown \epsilon$.
Si $x \in C, n \in \mathbf{N}$, on note $x_{|n} = (x(0), ..., x(n-1))$.

Théorème 4.12
Soit $s = (s_0, ..., s_n) \in S$.
Les N_s sont ouverts, fermés et forment une base de la topologie de C.

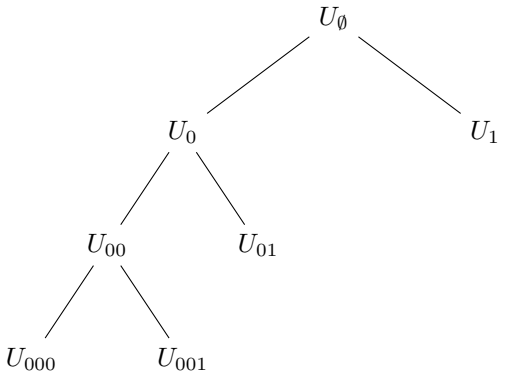
Preuve. Pour n'importe quel élément $x \in N_s$, on a $N_s = \mathcal{B}(x, 2^{-n})$. En effet, si $y \in \mathcal{B}(x, 2^{-n})$ et $y \neq x$, $n(x,y) > n$ donc $\forall k \in [|0,n|], y(k) = x(k) = s_k, y \in N_s$.
Réciproquement, si $y \in N_s \setminus \{x\}, n(x,y) > n$ donc $d(x,y) < 2^{-n}, y \in \mathcal{B}(x, 2^{-n})$.
Donc N_s est ouvert et l'ensemble des N_s forme une base de la topologie de C.
On pose E_n les éléments de S de longueur $n+1$. On a alors $N_s = C \setminus \cup_{t \in E_n \setminus \{s\}} N_t = \cap_{t \in E_n \setminus \{s\}} (C \setminus N_t)$. Les $C \setminus N_t$ sont fermés donc N_s est fermé. □

Théorème 4.13
Soit (X,d) un espace métrique non vide, compact, parfait dont la topologie admet une base constituée de parties ouvertes et fermés.
Alors (X,d) est homéomorphe à l'espace de Cantor.

Lemme 4.14
Soit (X,d) un espace métrique non vide, compact, parfait dont la topologie admet une base constituée de parties ouvertes et fermés.
Soient U une partie ouverte et fermé non vide de (X, d_X) et $\epsilon > 0$.
Alors il existe $n \geq 2$ et $U_1, ..., U_n$ des parties ouvertes fermées non vides de diamètre plus petit que ϵ telles que $U = \cup_{k=1}^n U_k$.

Preuve. [du lemme] U est fermé dans (X,d) qui est compact donc U est compact. U est ouvert donc c'est une réunion de boules $B(x_i,r)$ avec $0<r<\epsilon$ et quitte à réduire ϵ, on suppose que ces boules sont différentes de U. Or chacune de ces boules est une réunion de parties à la fois ouvertes et fermées donc il existe un ensemble I, $(V_i)_{i\in I}$ des parties ouvertes et fermées de diamètre plus petit que ϵ telles que $\forall i\in I, V_i\neq U$ et $U=\cup_{i\in I}V_i$. U est compact donc il existe $i_1,...,i_n\in I$ tels que $U=\cup_{k=1}^{n}V_{i_k}$
On pose alors $U_k=V_{i_k}, k\geq 2$ car $U\neq V_i$. □

Preuve. [du théorème] On construit à l'aide du lemme une fammile de parties non vides, ouvertes et fermées $(U_s)_{s\in S}$ telles que :
i) $U_\emptyset=X$
ii) $\forall s\in S, U_s=U_{s\frown 0}\cup U_{s\frown 1}$ et $U_{s\frown 0}\cap U_{s\frown 1}=\emptyset$
iii) $\mathrm{diam}(U_s)\to_{|s|\to+\infty}0$
On explique seulement l'initialisation et les premières étapes, la suite se fait par récurrence.
On pose $U_\emptyset=X$.
D'après le lemme précédent, on peut écrire : $U_\emptyset=\sqcup_{i=0}^{n_1}V_i$ avec $\mathrm{diam}(V_i)\leq 1/2$. On pose $U_{0^{n-1}}=V_n$ et pour $i\in[|0,n-2|], U_{0^i\frown 1}=V_{i+1}, U_{0^i}=V_{i+1}\cup...\cup V_n$. On peut représenter la construction par l'arbre suivant dont on ne représente que les premières branches :



Pour $\alpha\in C$, on pose alors $K_\alpha=\cap_{n\in\mathbf{N}}U_{\alpha_{|n}}$.
K_α est non vide car c'est une intersection décroissante de compacts non vides. De plus, $\mathrm{diam}(K_\alpha)=0$ car $\mathrm{diam}(U_{\alpha_{|n}})\to_n 0$ donc on peut écrire $K_\alpha=\{f(\alpha)\}$. f est continue car $\mathrm{diam}(U_s)\to_{|s|\to\infty}0$.
Si $\alpha\neq\beta$ et $n=n(\alpha,\beta)$, alors $\alpha=s\frown\epsilon\frown\alpha'$ et $\beta=s\frown\epsilon'\frown\beta'$ avec $\epsilon'=1-\epsilon$.
Donc $f(\alpha)\in U_{s\frown\epsilon}, f(\beta)\in U_{s\frown\epsilon'}$ et ces deux ouverts sont disjoints donc $f(\alpha)\neq f(\beta), f$ est injective.
Soit $x\in X$.
Par récurrence, on construit $\alpha\in C$ tel que : $\forall x\in X,\forall n\in\mathbf{N}, x\in U_{\alpha_{|n}}$:
Comme $U_0\cup U_1=X$, on peut choisir $\alpha(0)$ de sorte que $x\in U_{\alpha(0)}$.
Mais $U_{\alpha(0)}=U_{\alpha(0)\frown 0}\cup U_{\alpha(0)\frown 1}$ donc on peut choisir $\alpha(1)$ de sorte que $x\in U_{\alpha(0)\frown\alpha(1)}$.
On répète ce procédé pour obtenir le résultat. On obtient donc que f est surjective, puis f est un homéomorphisme de (C,d) dans (X,d_X).

□

Théorème 4.15
Il existe un homéomorphisme de C sur $C\times C$ et de C sur $C^{\mathbf{N}}$.

Preuve. $C\times C$ est un espace métrique non vide compact (en tant que produit de deux compacts). $\{N_s\times N_t : s,t\in\mathcal{S}\}$ forme une base de parties ouvertes et fermés de la topologie de $C\times C$. De plus, chaque $N_s\times N_t$ est infini donc $C\times C$ n'a pas d'ouvert fini et donc pas de points isolés. D'après le théorème précédent, $C\times C$ est homéomorphe à C.
De même pour $C^{\mathbf{N}}$. □

Définition 4.16
On définit une suite de fermés K_n de $[0,1]$ de la manière suivante :
$K_0=[0,1]$
$K_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$
Si K_n est construit, et s'écrit $K_n=[0,a_0]\cup[a_1,a_2]\cup...\cup[a_m,1]$ avec $0<a_0<...<a_m<1$, alors on pose $K_{n+1}=[0,\frac{1}{3}a_0]\cup[\frac{2}{3}a_0,a_0]\cup...\cup[a_m,a_m+\frac{1-a_m}{3}]\cup[a_m+2\frac{1-a_m}{3},1]$ (on découpe chaque intervalle en trois et on retire la partie centrale).
On pose $K=\cap_{n=0}^{+\infty}K_n$ et on l'appelle l'ensemble triadique de Cantor.

Théorème 4.17
L'ensemble triadique de Cantor K est homéomorphe à l'espace de Cantor C.

Preuve. Soit $f : C \to [0,1] : x \to \sum_{i=0}^{+\infty} 2\frac{x_i}{3^i}$. Montrons que f est un homéomorphisme de C dans K.
Si $x, y \in C$ tels que $d(x,y) < 2^{-n}$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3i} = \frac{1}{3^n}$ donc f est continue.
Si $x \neq y$ et $n = n(x,y)$, alors $|f(x) - f(y)| = |\sum_{i\geq n} 2\frac{x(i)}{3i} - \sum_{i\geq n} \frac{y(i)}{3i}| = |2\frac{x(n)-y(n)}{3^n} + \sum_{i\geq n+1} 2\frac{x(i)-y(i)}{3i}| \geq \frac{2}{3^n} - 2\sum_{i\geq n+1} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n} > 0$. Donc f est injective.
Pour $x \in C : \forall n \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{n} 2\frac{x(i)}{3^i} \in K$ et K est fermé donc $f(x) \in K$.
Soit $y \in K$.
Si $y \in [0, 1/3]$, on pose $x(0) = 0$, sinon on pose $x(0) = 1$. On répète ce procédé à chaque étape et on obtient ainsi que $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{n} 2\frac{x(i)}{3^i} \leq y \leq \sum_{i=0}^{n} 2\frac{x(i)}{3^i} + \frac{1}{3^n}$. Donc $y = f(x)$.
f est une bijection continue de C sur K, C est compact, donc f est un homéomorphisme de C sur K. □

Lemme 4.18
Soit $f : K \to [0,1]$ continue.
f s'étend en une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Remarque 4.19
C'est un cas particuliers du théorème de prolongement de Tietze.

Preuve. Pour $x \in K$, on pose $\tilde{f}(x) = f(x)$.
Soit $x \in [0,1] \setminus K$.
Il existe $a, b \in K$ tels que $]a,b[\cap K = \emptyset$ et $x \in]a,b[$. Donc $x = ta + (1-t)b$ pour un $t \in]0,1[$. On pose alors $\tilde{f}(x) = tf(a) + (1-t)f(b)$. Montrons que $\tilde{f}$ est bien continue sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1] \setminus K$, il existe un intervalle ouvert sur lequel $\tilde{f}$ est affine donc continue.
Soient $x \in K$ et $\epsilon > 0$.
Par continuité de $f, \exists \delta > 0 : \forall y \in K, |y - x| \leq 2\delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$. Cas 1 : x est extrémité d'un intervalle qu'on enlève à $[0,1]$ dans la construction de K, sans perte de généralité, on peut supposer que c'est l'étrémité de gauche.
Par ce qui précède, f est continue à droite en x
Soit $y \leq x$ tel que $|y - x| \leq \delta$.
Si $y \in K$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$
Sinon : $\exists a, b \in K :]a,b[\cap K = \emptyset$ et $|a - x| \leq 2\delta, |b - x| \leq \delta$. On a donc $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon, |f(x) - f(b)| \leq \epsilon$.
Or $\tilde{f}(x) \in [f(a), f(b)]$ donc $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$ donc $\tilde{f}$ est continue en x.
Cas 2 : x n'est pas l'extrémité d'un intervalle qu'on enlève à $[0,1]$ pour construire K.
On considère alors $\delta' > 0$ tel que $]x - \delta', x + \delta'[$ n'intersecte aucun de ces intervalles qui ont une longueur plus grande que δ et on vérifie de même que précedemment que si $z \in [0,1]$ tel que $|z - x| \leq \delta$, alors $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)| \leq \epsilon$. □

Théorème 4.20
Soit F un fermé non vide de C.
Il existe une fonction continue $r : C \to F$ telle que $\forall x \in F, r(x) = x$.
En particulier, r est une surjection continue de C sur F.

Preuve. Si $x \in F$: on pose $r(x) = x$.
Si $x \notin F : d(x,F) > 0$ car F est fermé. Or si $y \in F$ tel que $x_{|m} = y_{|m}$, alors $d(x,y) \leq 2^{m-1}$.
On pose $m(x) = \begin{cases} \max\{m \in \mathbf{N} : \exists y \in F : x_{|m} = y_{|m}\} \\ 0 \text{ si } \forall y \in F, x(0) \neq y(0) \end{cases}$ et $r(x) = y_{x_{|m(x)}}$ avec $y \in F$ tel que y prolonge $x_{|m(x)}$. r est bien à valeurs dans F et $r(x) = x$ pour tout $x \in F$.
Montrons que r est continue :
Si $x \notin F$: pour tout $y \in C$ tel que $d(x,y) < 2^{-m(x)}$,, alors $m(x) = m(y)$ donc $r(x) = r(y)$.
Si $x \in F$: pour tout $y \in C$ tel que $d(x,y) < 2^{-n}$, alors $m(y) \geq n$, donc $r(y)$ étend $y_{|n} = x_{|n}$ donc $d(r(x), r(y)) < 2^{-n}$.
Donc r est continue en x. □

Théorème 4.21
Soit (X, d_X) un espace métrique compact non vide.
Il existe une surjection continue $f : (C,d) \to (X, d_X)$.

Preuve. Soit $f : C \to [0,1]$ telle que $\forall x \in C, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{2^n}$.
De la même manière qu'à la preuve 4.2, on montre que f est une surjection continue de C sur $[0,1]$. On pose alors $g : C^{\mathbf{N}} \to H$ définie par $g(x) = (f(x_0), f(x_1), ...)$. g est une surjection continue de $C^{\mathbf{N}}$ sur $H = [0,1]^{\mathbf{N}}$. Or C et $C^{\mathbf{N}}$ sont homéomorphes donc il existe $\varphi : C \to C^{\mathbf{N}}$ un homéomorphisme et on a alors $\tilde{g} = g \circ \varphi$ est une surjection continue de C sur H. De plus, il existe un fermé $\tilde{X}$ de H et un homéomorphisme $h : X \to \tilde{X}$. Alors $F = \tilde{g}^{-1}(\tilde{X})$ est un fermé non vide de C donc il existe une rétraction continue $r : C \to F$.
Ainsi, $h \circ \tilde{g} \circ r$ est une rétraction continue de C sur X. □

Théorème 4.22
Il existe des courbes de Peano, c'est à dire, des surjections continues de $[0,1]$ *dans* $[0,1] \times [0,1]$.

Preuve. $[0,1] \times [0,1]$ est compact et C est homéomorphe à K donc il existe $f : K \to [0,1] \times [0,1]$ une surjection continue. On note f_1, f_2 ses coordonnées, f_1, f_2 sont des fonctions continues de K dans $[0,1]$ donc on peut les prolonger en $g_1, g_2 : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ des fonctions continues
$g = (g_1, g_2)$ est une surjection continue de $[0,1]$ dans $[0,1] \times [0,1]$. □

Chapitre 5

Duaux d'espaces de fonctions continues

5.1 Compléments en théorie de la mesure

5.1.1 Régularité des mesures

Dans cette partie, X est un espace métrique et la tribu considérée sur X est la tribu borélienne notée $\mathcal{B}(X)$.

Définition 5.1
- On dit que μ est régulière intérieurement lorsque pour tout $A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact} \subset A\}$.
- On dit que μ est régulière extérieurement lorsque pour tout $A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \sup\{\mu(O) : A \subset O \text{ ouvert}\}$.
- μ est dite régulière si elle est régulière intérieurement et extérieurement.

Remarque 5.2
L'argument de régularité sera très utile pour montrer des propriétés d'unicités de mesures. En effet, si deux mesures sont régulières et coïncident sur les compacts, alors elles sont égales.

Définition 5.3
Une mesure borélienne est dite de Borel si elle est finie sur les compacts.

Proposition 5.4
Soit μ une mesure finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$.
Pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \epsilon$.
Autrement dit : $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé } \subset A\} = \inf\{\mu(O) : A \subset O \text{ ouvert }\}$.

Preuve. On pose $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(X) : A \text{ vérifie la proposition}\}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est une tribu contenant les ouverts donc $\mathcal{B}(X)$.
Soient A un ouvert et $\epsilon > 0$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $F_n = \{x \in X : d(x, A^c) \geq 1/n\}$. $x \mapsto d(x, A^c)$ est continue donc F_n est fermé et $\cup_{n\geq 1} F_n = \{x \in X : d(x, A^c) > 0\} = A$.
$\forall n \in \mathbf{N}^*, F_n \subset F_{n+1}$ donc $\lim_n \mu(F_n) = \mu(A)$. μ est finie donc $\lim_n \mu(A \setminus F_n) = 0$ soit, à partir d'un certain rang $n : \mu(A \setminus F_n) < \epsilon$. Donc $\mathcal{A}$ contient les ouverts.
Soient $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}, \epsilon > 0$.
$\forall n \in \mathbf{N}^*$, il existe un ouvert O_n et un fermé F_n tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(F_n \setminus O_n) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$.
Or $\cup_n F_n \subset \cup_n A_n \subset \cup_n O_n$ donc :
$\mu((\cup_n O_n) \setminus (\cup_n F_n)) \leq \mu(\cup_n (O_n \setminus F_n)) \leq \sum_n \mu(O_n \setminus F_n) \leq \sum_n \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leq \epsilon/2$
De plus, il existe $n_\epsilon \geq 1$ tel que $\mu(\cup_n F_n) \leq \mu(\cup_{k=1}^{n_\epsilon} F_k) + \epsilon/2$.
On pose maintenant $O = \cup_n O_n$ et $F = \cup_{k=1}^{n_\epsilon} F_k$. O est un ouvert contenant A, F est un fermé contenu dans A et :$\mu(O \setminus F) = \mu(\cup_n O_n) - \mu(F) = \mu(\cup_n O_n) - \mu(\cup_n F_n) + \mu(\cup_n F_n) - \mu(F) \leq \epsilon$. Donc $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.
Soient $A \in \mathcal{A}, \epsilon > 0$, F fermé contenu dans A, O ouvert contenant A tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \epsilon$. On a donc $O^c \subset A^c \subset F^c$, O^c est un fermé contenu dans A, F^c est un ouvert contenant A et $\mu(F^c \setminus O^c) = \mu(O \setminus F) \leq \epsilon$. Donc $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.
$\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}(X) : \mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$. □

Définition 5.5
Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B}(X))$.

On dit que μ est σ-finie lorsqu'il existe une suite croissante de boréliens $(E_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$X = \cup_n E_n$ et $\forall n \geq 1, \mu(E_n) < +\infty$. Dans ce cas, l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ est dit σ-fini.

Théorème 5.6
Supposons (X, μ) σ-fini : $X = \cup_{n\geq 1} E_n$ avec $\mu(E_n) < +\infty$ et $E_n \subset E_{n+1}$.
a) Si μ est une mesure σ-finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$, alors $\forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé } \subset A\}$.
b) Si de plus $X = \cup_{n\geq 1} \overset{\circ}{E_n}$, alors μ est régulière extérieurement.
c) Si on peut choisir les boréliens E_n compacts, alors μ est régulière intérieurement.

Preuve. a) Cas 1 : $\mu(A)$ est fini.
Soit $\epsilon > 0$.
$A = \cup_n (A \cap E_n)$ donc il existe $n_\epsilon \geq 1$ tel que $\mu(A) \leq \mu(A \cap E_{n_\epsilon}) + \epsilon$ soit $\mu(A \cap E_{n_\epsilon}^c) \leq \epsilon/2$. On pose $\tilde{\mu}$ la mesure définie par $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap E_{n_\epsilon})$. $\tilde{\mu}$ est une mesure finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$ donc par la proposition 5.4 il existe un fermé F contenu dans A tel que $\tilde{\mu}(A \setminus F) \leq \epsilon$. $\mu(A \setminus F) = \mu((A \setminus F) \cap E_{n_\epsilon}) + \mu((A \setminus F) \cap E_{n_\epsilon}^c) \leq \tilde{\mu}(A \setminus F) + \mu(A \cap E_{n_\epsilon}) \leq 2\epsilon$.
Cas 2 : $\mu(A) = +\infty$
$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap E_n)$ mais d'après le cas 1 :
$\mu(A \cap E_n) = \sup\{\mu(F) : F \subset A \cap E_n, F \text{ fermé}\} \leq \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé } \subset A\}$ donc $\mu(A) \leq \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé } \subset A\}$ puis $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé } \subset A\}$
b) Pour $n \geq 1$, on pose $\mu_n = \mu(\cdot \cap E_n)$.
Soient $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\epsilon > 0$. $\forall n \geq 1$, il existe O_n un ouvert contenant A tel que $\mu(O_n \setminus A) \leq \epsilon/2^n$ donc $\mu(O_n \cap E_n) \leq \mu(A \cap E_n) + \epsilon/2^n$.
Par récurrence, on montre que $\mu(\cup_{k=1}^n (O_k \cap E_k)) \leq \mu(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^n \epsilon/2^k$:
Si $n = 1$: le résultat est vrai.
Soit $n \geq 2$ tel que $\mu(\cup_{k=1}^n (O_k \cap E_k)) \leq \mu(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^n \epsilon/2^k$.

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{k=1}^{n+1}(O_k \cap E_k)) &= \mu(O_{n+1} \cap E_{n+1}) + \mu(\cup_{k=1}^n (O_k \cap E_k)) - \mu((O_{n+1} \cap E_{n+1}) \cap \cup_{k=1}^n (O_k \cap E_k)) \\ &\leq \mu(A \cap E_{n+1}) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} + \mu(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{2^k} - \mu((O_{n+1} \cap E_{n+1}) \cap \cup_{k=1}^n (O_k \cap E_k))\end{aligned}$$

Or $A \cap E_n \subset \cup_{k=1}^n (A \cap E_k) \subset \cup_{k=1}^n (O_k \cap E_k)$ et $A \cap E_n \subset A \cap E_{n+1} \subset O_{n+1} \cap E_{n+1}$ donc :

$$\mu(\cup_{k=1}^{n+1}(O_k \cap E_k)) \leq \mu(A \cap E_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2^k}$$

Par passage à la limite, on obtient donc $\mu(\cup_n (O_n \cap \overset{\circ}{E_n})) \leq \mu(\cup_n (O_n \cap E_n)) \leq \mu(A) + \epsilon$. De plus, $X = \cup_n \overset{\circ}{E_n}$ donc $A = \cup_n (A \cap \overset{\circ}{E_n}) \subset \cup_n (O_n \cap \overset{\circ}{E_n})$.
c) Les $F \cap E_n$ sont compacts et $\mu(F) = \lim_n \mu(F \cap E_n)$. □

Lemme 5.7
Si (X, d) est un espace métrique localement compact et séparable, alors (X, d) est σ-compact.

Preuve. On pose $I = \{(n, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Q}_+^* : \overline{\mathcal{B}(x_n, r)} \text{ compact}\}$. I est au plus dénombrable donc on peut l'écrire sous la forme $I = \cup_{p\geq 1} I_p$ avec $(I_p)_p$ une suite croissante d'ensembles finis.

Soient $x \in X$ et K_x un voisinage compact de x. Il existe $(n, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Q}_+^*$ tel que $x \in \overline{\mathcal{B}}(x_n, r) \subset \overset{\circ}{K_x}$. On pose $K_p = \cup_{(n,r)\in I_p} \overline{\mathcal{B}}(x_n, r)$ et comme $X = \cup_{(n,r)\in I} \overline{\mathcal{B}}(x_n, r)$, on a $X = \cup_{p\geq 1} K_p$. Les K_p sont compacts en tant que réunion finie de compacts donc X est σ-compact. □

Théorème 5.8
Une mesure de Borel sur un espace métrique localement compact et séparable est régulière.

Preuve. Par le théorème 5.6, il suffit de montrer que $X = \cup_{n\geq 1} \overset{\circ}{L_n}$ avec L_n compact et $L_n \subset L_{n+1}$. On reprend les notations de la preuve précédente.

On pose $L_1 = K_1$ et on suppose avoir construit $L_1, ..., L_n$ tels que $K_k \subset L_k$ et $L_{k-1} \subset \overset{\circ}{L_k}$. $K_{n+1} \cup L_n$ est compact et X est localement compact donc pour tout $x \in K_{n+1} \cup L_n$, il existe V_x un voisinage compact de x dans X. $(\overset{\circ}{V_x})_{x \in K_{n+1} \cup L_n}$ est un recouvrement ouvert de $K_{n+1} \cup L_n$ donc il existe $x_1, ..., x_p \in K_{n+1} \cup L_n$ tels que $K_{n+1} \cup L_n \subset \cup_{j=1}^p \overset{\circ}{V_{x_j}}$. On pose $L_{n+1} = \cup_{j=1}^p V_{x_j}$. L_{n+1} est compact en tant qu'union finie de compacts,

$K_{n+1} \subset L_{n+1}$ et $L_n \subset \cup_{j=1}^{p} \overset{\circ}{V}_{x_j} \subset \overset{\circ}{L}_{n+1}$. Ainsi, la suite de compact (L_n) vérifie :
$X = \cup_n K_n \subset \cup_n L_n \subset \cup_n \overset{\circ}{L}_{n+1} \subset \cup_n \overset{\circ}{L}_n \subset X$ donc $X = \cup_n \overset{\circ}{L}_n$. □

Définition 5.9
Une mesure de Radon est une mesure de Borel régulière exterieurement et vérifiant : pour tout ouvert O de X, $\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact } \subset A\}$.

5.1.2 Théorème d'extension de Carathéodory

Définition 5.10
Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X est une algèbre si :
i) $X \in \mathcal{A}$.
ii) $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$.
iii) $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$.

Définition 5.11
Soient $\mathcal{A}$ une algèbre sur X
Une prémesure sur X est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ telle que :
i) $\mu(\emptyset) = 0$.
ii) Pour $(A_n)_n$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, $\mu(\sqcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Théorème 5.12 (Carathéodory)
Soient $\mathcal{A}$ une algèbre sur X et μ une prémesure sur $\mathcal{A}$.
Alors il existe une unique mesure sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, coïncidant avec μ sur $\mathcal{A}$.

Preuve. Pour une preuve, voir [1]. □

5.2 Théorème de Riesz pour les espaces compacts

Pour K un compact, on note $C(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbf{R}$ et on munit $C(K)$ de $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 5.13
Soit φ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X)$.
On dit que φ est positive lorsque pour toute fonction continue sur X à valeurs positives $\varphi(f) \geq 0$.

Théorème 5.14 (Stone-Weierstrass)
Soient (X, d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $C(X, \mathbf{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :
1) $\forall f, g \in \mathcal{A}, fg \in \mathcal{A}$.
2) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
3) $\forall x \neq y, \exists f \in \mathcal{A} / f(x) \neq f(y)$.
Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Preuve. Commençons par montrer le résultat suivant : si $f \in \mathcal{A}$, alors $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$.
Soit $f \in \mathcal{A}$. On pose $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto t$. Par théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynomes sur $[-1, 1]$ telle que $\|P_n - v\|_\infty \to_n 0$
Cas 1 : $\|f\|_\infty \leq 1$.
Alors : $\forall x \in X, f(x) \in [-1, 1]$. Par ce qui précède, on a donc $\|P_n \circ f - v \circ f\|_\infty \to_n 0$ et $P_n \circ f \in \mathcal{A}$.
Cas 2 : $\|f\|_\infty > 1$.
On pose alors $g = \frac{f}{\|f\|_\infty}$. Par le cas 1, $g \in \bar{\mathcal{A}}$ et comme $\bar{\mathcal{A}}$ est un espace vectoriel $f \in \bar{\mathcal{A}}$. Pour $f, g \in \mathcal{A}, \max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$. Par ce qui précède, si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $\max(f, g), \min(f, g) \in \bar{\mathcal{A}}$.
Soient $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Montrons qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$.
$\mathcal{A}$ sépare les points de X donc il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x_1) \neq g(x_2)$. On pose alors $f : x \mapsto \frac{g(x_2)-g(x)}{g(x_2)-g(x_1)}\alpha_1 + \frac{g(x_1)-g(x)}{g(x_1)-g(x_2)}\alpha_2$. Alors $f \in \mathcal{A}$ et $f(x_1) = \alpha_1, f(x_2) = \alpha_2$.
Soient $g \in C(X, \mathbf{R})$ et $\epsilon > 0$.
Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$, on pose $f_y \in \mathcal{A}$ telle que $f_y(x) = g(x)$ et $f_y(y) = g(y)$ et $U_y = \{z \in X : f_y(z) > g(z) - \epsilon\}$. U_y est un ouvert de X contenant y donc $(U_y)_{y\in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Mais

X est compact donc il existe $y_1, ..., y_n \in X$ tels que : $\forall z \in X, \exists i \in [|1,n|] : f_{y_i}(z) > g(z) - \epsilon$. On pose alors $h_x = \max(f_{y_1}, ..., f_{y_n}) \in \bar{\mathcal{A}}$. Alors $h_x(x) = g(x)$ et : $\forall z \in X, h_x(z) > g(z) - \epsilon$.
On pose maintenant $V_x = \{z \in X : h_x(z) < g(z) + \epsilon\}$. V_x est un ouvert de X contenant x, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini, il existe $x_1, ..., x_n \in X$ tels que : $\forall z \in X, \exists i \in [|1,n|] : h_{x_i}(z) < g(x) + \epsilon$.
On pose alors $h = \min(h_{x_1}, ..., h_{x_n})$. Montrons que $h \in \overline{\mathcal{A}}$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $g_1, ..., g_n \in \mathcal{A}$ telles que $\|h_{x_i} - g_i\|_\infty \leq \epsilon$ pour $i \in [|1,n|]$.
On pose $g = \min\{g_1, ..., g_n\}$. On a $g \in \mathcal{A}$ et $\|h - g\|_\infty \leq \epsilon$ donc $h \in \overline{\mathcal{A}}$.
Alors h vérifie : $\forall z \in X, h(z) < g(z) + \epsilon$.
On a donc trouvé $h \in \bar{A}$ telle que : $\forall x \in X, |h(x) - g(x)| < \epsilon$, autrement dit $\|h - g\|_\infty < \epsilon$. □

Lemme 5.15
Toute forme linéaire φ positive sur $\mathcal{C}(X)$ est continue et $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Preuve. Soit $f \in C(X)$ non nulle. On pose $g = 1 - \frac{f}{\|f\|_\infty}$.
g est continue positive donc $\varphi(g) \geq 0$ puis $\varphi(f) \leq \|f\|_\infty \varphi(1)$. Donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq \varphi(1)$
De plus $\varphi(1) \leq \|\varphi\| \times \|1\|_\infty = \|\varphi\|$ donc $\|\varphi\| = \varphi(1)$. □

Théorème 5.16 (Théorème de Riesz version positive)
Soient X un espace métrique compact et φ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X)$.
Alors il existe une unique mesure borélienne finie μ sur X telle que pour toute $f \in \mathcal{C}(X), \varphi(f) = \int_X f d\mu$.

Remarque 5.17
Le théorème de Riesz fait donc le lien entre les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}(X)$ et les mesures boréliennes finies sur X. Travailler avec une mesure borélienne finie sur X revient donc à travailler avec une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X)$. Le théorème de Riesz pour les espaces topologiques localements compacts sera fondamental dans la preuve de l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe topologique localement compact.

Théorème 5.18 (Théorème de Riesz)
Soient X un espace métrique compact et φ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(X)$.
Alors il existe deux mesures boréliennes finies μ_1, μ_2 sur X telles que : $\forall f \in \mathcal{C}(X), \varphi(f) = \int_X f d\mu_1 - \int_X f d\mu_2$.

Lemme 5.19
Soient X un espace métrique compact et $\varphi \in \mathcal{C}(X)^*$.
Il existe deux formes linéaires positives φ_1, φ_2 sur $\mathcal{C}(X)$ telles que : $\forall f \in \mathcal{C}(X), \varphi(f) = \varphi_1(f) - \varphi_2(f)$.

Preuve. Pour $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}^+)$, on pose $\varphi_1(f) = \sup\{\varphi(g) : 0 \leq g \leq f\}$ et $\varphi_2(f) = \varphi_1(f) - \varphi(f)$.
Pour $f \in C(X, \mathbf{R}^+), 0 \leq f$ donc $\varphi_1(f) \geq \varphi_1(0) = 0$.
De plus, $\varphi(f) \leq \varphi_1(f)$ donc $\varphi_2(f) \geq 0$.
$\forall \lambda \in \mathbf{R}^+, \varphi_1(\lambda f) = \lambda \varphi_1(f)$.
Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}^+)$.
Si $\begin{cases} 0 \leq g_1 \leq f_1 \\ 0 \leq g_2 \leq f_2 \end{cases}$, alors $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ donc $\varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi_1(f_1 + f_2)$ puis $\varphi_1(f_1) + \varphi_1(f_2) \leq \varphi_1(f_1 + f_2)$.
Si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, on pose $g_1 = \min(g, f_1)$ et $g_2 = g - g_1$.
Si $g_1(x) = g(x)$, alors $g_2(x) = 0 \leq f_2(x)$ et si $g_1(x) = f_1(x)$, alors $g_2(x) = g(x) - f_1(x) \leq f_2(x)$
On a alors $\begin{cases} 0 \leq g_1 \leq f_1 \\ 0 \leq g_2 \leq f_2 \end{cases}$ donc $\varphi(g) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi_1(f_1) + \varphi_2(f_2)$ puis $\varphi_1(f_1 + f_2) \leq \varphi_1(f_1) + \varphi_2(f_2)$.
Donc $\varphi_1(f_1 + f_2) = \varphi_1(f_1) + \varphi_2(f_2)$.
Pour $f \in \mathcal{C}(X)$, on pose $\varphi_1(f) = \varphi_1(f^+) - \varphi_1(f^-)$.
Soient $f, g \in \mathcal{C}(X)$.

$$\begin{aligned} \varphi_1(f+g) &= \varphi_1(f^+ - f^- + g^+ - g^-) \\ &= \varphi_1(f^+ + g^+ - (f^- + g^-)) \\ &= \varphi_1(f^+) + \varphi_1(g^+) - \varphi_1(f^-) + \varphi_1(g^-) \\ &= \varphi_1(f) + \varphi_1(g) \end{aligned}$$

Donc φ_1 est linéaire.
$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ donc φ_2 est aussi linéaire. □

Preuve. [théorème de Riesz version positive] Unicité (sous reserve d'existence) :
On suppose qu'il existe deux mesures μ, ν borélienne, finies sur X telles que : $\forall f \in \mathcal{C}(X), \varphi(f) = \int_X f d\mu = \int_X f d\nu$.
Soient K un compact de X et $\epsilon > 0$.
On pose $L_\epsilon = \{x \in X : d(x,K) \geq \epsilon\}$ et $f_\epsilon(x) = \frac{d(x,L_\epsilon)}{d(x,K)+d(x,L_\epsilon)}$. L_ϵ est fermé dans X (qui est compact) donc est compact. f_ϵ est à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur K et 0 sur L_ϵ. Donc $\forall x \in X, f_\epsilon(x) \to_{\epsilon\to 0} \chi_K(x)$. De plus $\forall x \in X, |f_\epsilon(x)| \leq 1$ et 1 est intégrable sur K car μ est finie donc par théorème de convergence dominée : $\int_X f_\epsilon d\mu \to_{\epsilon\to 0} \int_X \chi_K d\mu = \mu(K)$. Or $\int_X f_\epsilon d\mu = \varphi(f_\epsilon)$ donc $\mu(K) = \lim_{\epsilon\to 0} \varphi(f_\epsilon)$. De même avec ν et on obtient ainsi que $\mu(K) = \nu(K)$
Par régularité des mesures μ et ν (proposition 5.4), on obtient que $\mu = \nu$
Preuve du théorème de Riesz sur l'espace de Cantor :
On considère φ une forme linéaire sur $C(K)$ avec $K = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ l'espace de Cantor. On note Clopen(K) l'ensemble des parties de K qui sont à la fois ouvertes et fermées. Clopen(K) est stable par union finie, par passage au complémentaire et contient $\emptyset$ et K donc c'est une algèbre de parties de K. Par théorème d'extension de Carathéodory, toute prémesure sur Clopen(K) s'étend en une mesure positive sur la tribu engendrée par Clopen(K). La topologie sur K admet une base de parties à la fois ouvertes et fermées donc toute prémesure positive sur Clopen(K) s'étend en une mesure borélienne sur K. Pour $A \in$ Clopen(K), on pose $\mu(A) = \varphi(\chi_A)$, μ est alors finiment additive sur Clopen(K).
Soit $(A_n)_n$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de Clopen(K) telles que $A = \cup_n A_n$ soit aussi ouverte et fermée.
A est fermée dans K donc compact et (A_n) est un recouvrement ouvert de A donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N, A_n = \emptyset$ donc $\mu(A) = \mu(\cup_{n=0}^N A_n) = \sum_{n=0}^N \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$. Ainsi, par théorème d'extension de Carathéodory, il existe une mesure borélienne μ sur K telle que $\mu(A) = \varphi(\chi_A)$ pour toute partie A ouverte fermée.
On note $F =$ Vect$(\{\chi_A : A \in$ Clopen$(K)\})$. Par théorème de Stone-Weierstrass, F est dense dans $C(K)$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) donc $\forall f \in F, \varphi(f) = \int_K f d\mu$.
Soit $f \in C(K)$.
Il existe $(f_n)_n \in F^{\mathbf{N}}$ telle que (f_n) converge uniformément vers f.
$\varphi(f_n) = \int_K f_n d\mu$. $\forall x \in K, f_n(x) \to_n f(x)$ et : $|f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq \|f\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty$. Donc il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, |f_n(x)| \leq \|f\|_\infty + 1$. Donc par passage à la limite $\varphi(f) = \int_K f d\mu$
Preuve du théorème de Riesz sur X :
Il existe $\Pi : K \to X$ une surjection continue. On pose $\tau : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(K)$ définie par : $\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall y \in K, \tau(f)(y) = f(\Pi(y))$.
Si $\tau(f) = \tau(g)$, alors $\forall y \in X, f(\Pi(y)) = g(\Pi(y))$ donc $f = g$ par sujectivité de τ.
On définit $\tilde{\varphi} : \text{im}(\tau) \to \mathbf{R}$ par $\tilde{\varphi}(\tau(f)) = \varphi(f)$. $\forall f \in \text{im}(\tau), \tilde{\varphi}(f) \leq \tilde{\varphi}(1)\|f\|_\infty$.
Par théorème de Hahn-Banach, il existe ψ une forme linéaire continue sur $C(K)$ prolongeant $\tilde{\varphi}$ et telle que : $\forall f \in C(K), \psi(f) \leq \psi(1)\|f\|_\infty$.Comme $\psi(1) = \tilde{\varphi}(1)$, ψ est une forme linéaire positive sur $C(K)$.
Par la partie précédente, il existe μ mesure borélienne finie sur K telle que $\psi(f) = \int_K f d\mu$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \psi(\tau(f)) \\ &= \int_K \tau(f) d\mu \\ &= \int_K f \circ \Pi d\mu\end{aligned}$$

On pose ν la mesure image de μ par Π et on a donc :

$$\varphi(f) = \int_X f d\nu$$

□

Théorème 5.20
Sur $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, il existe une unique mesure μ telle que $\forall a_1 < b_1, ..., a_n < b_n, \mu(\Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Preuve. On pose $K_n = [-n, n]^d$ et $\varphi_n(f) = \int_{-n}^n ... \int_{-n}^n f(x_1, ..., x_d) dx_1 ... dx_d$.
φ_n est une forme linéaire positive donc par théorème de Riesz, il existe une unique mesure borélienne finie μ_n sur K_n telle que pour $f \in \mathcal{C}(K_n), \varphi_n(f) = \int_{K_n} f d\mu_n$.

Soit $i \in [|1,d|]$.

On pose $f_p^i(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a_i - 1/p \text{ ou } x > b_i + 1/p \\ p \text{ si } x \in [a_i - 1/p, a_i] \\ 1 \text{ si } x \in [a_i, b_i] \\ p \text{ si } x \in [b_i, b_i + 1/p] \end{cases}$ et $g_p^i(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a_i \text{ ou } x > b_i \\ p \text{ si } x \in [a_i, a_i + 1/p] \\ 1 \text{ si } x \in [a_i + 1/p, b_i - 1/p] \\ p \text{ si } x \in [b_i - 1/p, b_i] \end{cases}$.

On a alors $\forall i \in [|1,d|], g_p^i(x_i) \leq \mathbf{1}_{[a_i,b_i]}(x_i) \leq f_p^i(x_i)$ donc :
$f_p(x) \leq \mathbf{1}_{\Pi_{i=1}^n [a_i,b_i]}(x) \leq g_p(x)$ puis $\Pi_{i=1}^n (b_i - a_i - 1/p) \leq \mathbf{1}_{\Pi_{i=1}^n [a_i,b_i]}(x) \leq \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i + 1/p)$.
Par passage à la limite, on obtient le résultat suivant :
μ_n est l'unique mesure sur K_n vérifiant $\mu_n(\Pi_{i=1}^d [a_i,b_i]) = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i)$ pour $[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]$ des segments contenus dans $[-n,n]$. $\forall n \leq m, \forall B \in \mathcal{B}(K_m), \mu_n(B) = \mu_m(B)$. Donc pour tout borélien B de $\mathbf{R}^d$, on pose $\lambda(B) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(B \cap [-n,n]^d)$.
λ est une mesure borélienne σ-finie sur $\mathbf{R}^d$ vérifiant $\lambda(\Pi_{i=1}^d [a_i,b_i]) = \Pi_{i=1}^d |b_i - a_i|$.
On ainsi obtenu l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. □

5.3 Théorème de Riesz pour les espaces localement compacts

Théorème 5.21
Soient (X,d) un espace métrique localement compact séparable et φ une forme linéaire positive sur $C_c(X)$. Il existe une unique mesure de Radon μ telle que $\forall f \in C_c(X), \varphi(f) = \int_X f d\mu$.

Remarque 5.22
De la même manière que l'on a déduit l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ du théorème de Riesz pour les espaces compacts, on obtient une extension de ce théorème pour les espaces localements compacts. Les groupes topologiques localements compacts constituent notamment le bon cadre pour obtenir la mesure de Haar.

Preuve. Soit φ une forme linéaire positive sur $C_c(X)$.
X est séparable et localement compact donc $\sigma-$compact : $X = \cup_n K_n$ avec $K_n \subset K_{n+1}$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $F_n = \{x \in X : d(x,K_n) \geq 1\}$ et $f_n : x \mapsto \frac{d(x,F_n)}{d(x,K_n)+d(x,F_n)}$. f_n est à valeurs dans $[0,1], f_{n|K_n} = 1, f_{n|F_n} = 0$
On pose $\hat{X}$ le compactifié d'Alexandroff de X et $\varphi_n(f) = \varphi(f_n \cdot f)$ et on a alors φ_n une forme linéaire positive sur $C(\hat{X})$. Par théorème de Riesz dans le cas compact, il existe une unique mesure borélienne finie μ_n sur $\hat{X}$ telle que : $\forall f \in C(\hat{X}), \varphi_n(f) = \int f d\mu_n$.
Soit $A \subset K_n$ un borélien.
Pour $\epsilon > 0$, on pose $A_\epsilon = \{x \in \hat{X} : d(x,A) > \epsilon\}$ et $f_\epsilon(x) = \frac{d(x,A_\epsilon)}{d(x,A)+d(x,A_\epsilon)}$.
Alors, $\forall x \in \hat{X}, f_\epsilon(x) \to_{\epsilon \to 0} \chi_A(x)$.
$\varphi_n(f_\epsilon) \to \varphi_n(\chi_A) = \mu_n(A) = \mu_{n+1}(A)$. On pose alors $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A \cap K_n)$.
μ est bien finie sur les compacts. Soit $f \in C_c(G)$ telle que $\text{supp}(f) \subset K_n$.
Alors $f_n f = f$ sur $\text{supp}(f)$ donc $\varphi(f) = \varphi_n(f) = \int f d\mu_n$. Mais $\int f d\mu_n = \int f d\mu_{n+1}$ donc $\varphi(f) = \int f d\mu_n = \int f d\mu$.
Il reste à montrer l'unicité. Soient μ, ν deux mesures verifiant les conclusions de l'énoncé. μ, ν sont des mesures de Radon sur un espace métrique localement compact et séparable donc elles sont régulières.
Soient Ω un ouvert de X d'adhérence compacte et K un compact de X inclus dans Ω.
Pour $n \geq 1$, on pose $\Omega_n = \{x \in X : d(x,K) < 1/n\} \cap \Omega$. On a alors $\cap_{n \geq 1} \Omega_n = K$ et $\mu(\Omega_n) \leq \mu(\bar{\Omega}) < +\infty$ donc $\mu(\Omega_n \setminus K) \to_n 0$.
On pose maintenant $f_n(x) = \frac{d(x,\Omega_n^c)}{d(x,\Omega_n^c)+d(x,K)}$ avec $n \geq 1$. Les f_n vérifient $f_n(x) \in [0,1]$ et $K \subset \text{supp}(f) \subset \Omega_n$ donc :$\chi_K \leq f_n \leq \chi_{\Omega_n}$.
On a donc $\mu(K) \subset \varphi(f_n) \leq \mu(\Omega_n)$ soit $0 \leq \varphi(f_n) - \mu(K) \leq \mu(\Omega_n \setminus K) \to_n 0$. Donc $\varphi(f_n) \to_n \mu(K)$. On peut faire de même avec ν et on obtient ainsi que $\mu(K) = \nu(K)$ donc par régularité intérieure, $\mu = \nu$ □

Chapitre 6

Groupes localement compacts

6.1 Groupes topologiques

Dans toute cette partie, tous les groupes topologiques considérés sont supposés métrisables.

Définition 6.1
Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie telle que $(g,h) \to gh$ et $g \to g^{-1}$ soient continues.

Définition 6.2
Si G est un groupe topologique, on note 1 son élément neutre et pour $A, B \subset G, g \in G$, on définit :
$Ag = \{ag : a \in A\}, gA = \{ga : a \in A\}, A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}, AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$.
On dit que A est symétrique si $A = A^{-1}$.

Remarque 6.3
On remarque que $A \cap B = \emptyset \iff 1 \notin A^{-1}B$.

Proposition 6.4
Soit G un groupe topologique.
i) Si U est un ouvert de G, alors pour tout $g \in G, A \subset G$, gU, Ug, U^{-1}, AU, UA sont ouverts dans G.
ii) Pour tout voisinage U de 1 il existe un voisinage symétrique V de 1 tel que $VV \subset U$.
iii) Si H est un sous-groupe de G, alors $\overline{H}$ aussi.
iv) Tout sous-groupe ouvert est fermé.
v) Si A et B sont compacts dans G, alors AB est compact dans G.

Preuve. Soient $x \in G, A \subset G$.
L'appliation $G \to G : y \mapsto xy$ est un homéomorphisme de G dans G donc xU est un ouvert de G. De même pour Ux, U^{-1}.
$AU = \cup_{x \in G} xU$ donc AU est un ouvert de G. De même pour UA
ii) Soit U un voisinage de 1.
Par continuité de $(x,y) \to xy$ pour tout voisinage de 1, il existe V_1, V_2 des voisinages de 1 tels que $\forall (x,y) \in V_1 \times V_2, xy \in U$ donc $V_1 V_2 \subset U$. On pose $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$
iii) Soit $H \leq G$.
$\bar{H} \subset G$ et $1 \in \bar{H}$.
Soient $x, y \in \bar{H}$.
$\exists (x_n), (y_n) \in G^{\mathbf{N}} : x_n \to x, y_n \to y$. Par continuité de $(x,y) \to xy$ et $x \to x^{-1}, x_n y_n \to xy$ et $x_n^{-1} \to x^{-1}$
iv) Soit $H \leq G$ ouvert.
$G \setminus H = \cup_{g \neq 1} gH$ donc c'est un ouvert.
v) AB est l'image directe de $A \times B$ compacte par l'application continue $(g,h) \to gh$ donc est compact. □

Proposition 6.5
Soient G un groupe topologique et $H \leq G$.
On munit G/H de la topologie quotient.
i) Si H est fermé, alors G/H est séparé.
ii) Si G est localement compact, alors G/H aussi.
iii) Si H est distingué, alors G/H est un groupe topologique.

Remarque 6.6
Il est donc préférable de quotienter par des sous-groupes distingué et fermé afin d'obtenir une structure de groupe sur le quotient muni d'une topologie séparé.

Preuve. i) On suppose H fermé.
Soient $\bar{x} = \pi(x), \bar{y} = \pi(y)$ deux points distincts de G/H.
Alors xHy^{-1} est un fermé de G ne contenant pas 1 donc il existe V un voisinage symétrique de 1 tel que $VV \cap xHy^{-1} = \emptyset$. Montrons que $\pi(Vx)$ et $\pi(Vy)$ sont des voisinages distincts de $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
Par l'absurde, on suppose que $\pi(Vx) \cap \pi(Vy) \neq \emptyset$.
Soit $\pi(z) \in \pi(Vx) \cap \pi(Vy)$.
Alors $z \in VxH \cap VyH$ donc $\exists v_1, v_2 \in V, h_1, h_2 \in H$ tels que $z = v_1 x h_1 = v_2 y h_2$. Donc $v_1^{-1} v_2 = x h_1 h_2^{-1} y^{-1}$ ce qui est absurde car $VV \cap xHy^{-1} = \emptyset$.
ii) Si U est un voisinage compact de 1 dans G, alors $\pi(Ux)$ est un voisnage compact de $\pi(x)$ dans G/H.
iii) On suppose que H est distingué.
Soient $x, y \in G$ et U un voisnage de $\pi(xy)$ dans G/H.
Par continuité de la multiplication dans G, il existe V,W des voisinages de x, y tels que $VW \subset \pi^{-1}(U)$. Ainsi, $\pi(V)$ et $\pi(W)$ sont des voisinages de $\pi(x)$ et $\pi(y)$ tels que $\pi(V)\pi(W) \subset U$. Donc la multiplication dans G/H est continue. De même pour l'inversion. □

Théorème 6.7 (Birkhoff-Kakutani)
Soit G un groupe topologique
G est métrisable si et seulement si G est séparé et à base dénombrable de voisinages.
Dans ce cas, G admet une distance invariante à droite.

Preuve. Si G est métrisable, alors G est séparé et à base dénombrable de voisinages donc il suffit de montrer le sens réciproque.
Soit (U_n) une base dénombrables de voisinages de 1_G.
On peut supposer que $U_0 = G$ et que les U_n sont ouverts. G est séparé donc $\cap_n U_n = \{1\}$: on suppose qu'il existe $x \neq 1 \in \cap_n U_n$, alors on peut trouver U,V deux ouverts tels que $1 \in U, x \in V, U \cap V = \emptyset$. Mais (U_n) est une base de voisinages de 1 donc il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $U_n \subset U$: absurde car $x \in U_n \subset U, x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
On définit (V_n) une suite de voisinages ouverts de 1_G tels que :
i) $V_0 \subset G, V_{n+1} \subset V_n$
ii) $V_n = V_n^{-1}$
iii) $V_{n+1}^3 \subset V_n$
iv) $V_n \subset U_n$
Par récurrence, on suppose que $V_n \subset U_n \cap V_{n-1}$ et $V_n = V_n^{-1}$. Par continuité de la multiplication, il existe W_1, W_2, W_3 des voisinages ouverts de 1_G tels que $W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \subset V_n$, alors $W_1, W_2, W_3 \subset V_n$. Par continuité de l'inversion $W_1^{-1}, W_2^{-1}, W_3^{-1}$ sont des voisinages ouverts de 1_G. On pose $V_{n+1} = U_{n+1} \cap U_{n+1}^{-1} \cap W_1 \cap W_1^{-1} \cap W_2 \cap W_2^{-1} \cap W_3 \cap W_3^{-1}$. V_{n+1} est un voisinage ouvert de 1_G et on a toujours $i, ii), iii), iv)$. Par iv) : $\cap_n V_n = \{1_G\}$.
Pour $h, k \in G$, on pose $\rho(h,k) = \inf\{2^{-n} : h^{-1}k \in V_n\}$. Alors ρ vérifie :
1) $\rho(h,k) \geq 0$ et $\rho(h,k) = 0$ si et seulement si $h = k$
2) $\rho(h,k) = \rho(k,h)$
3) $\forall \epsilon > 0$, $\rho(g_0,g_1), \rho(g_1,g_2), \rho(g_2,g_3) \leq \epsilon \implies \rho(g_0,g_3) \leq 2\epsilon$
On pose $d(h,k) = \inf\{\sum_{i=0}^{l} \rho(g_i, g_{i+1}) : g_0 = h, g_{l+1} = k, g_1, ..., g_l \in G, l \in \mathbf{N}\}$
$d(h,k) \geq 0$ et $d(h,h) = 0$, $d(h,k) = d(k,h)$ et $d(h,k) \leq d(h,g) + d(g,k)$
Pour $h, k \in G$, on montre par récurrence que $\sum_{i=0}^{l} \rho(g_i, g_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\rho(g_0, g_{l+1})$:
Si $l \leq 2$: le résultat est vrai par 3).
Si $l \geq 3$:
On suppose que $\forall l' < l, \sum_{i=0}^{l'} \rho(g_i, g_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\rho(g_0, g_{i+1})$ et on pose $S = \sum_{i=0}^{l} \rho(g_i, g_{i+1})$.
Cas 1 : $\rho(g_0, g_1) \geq \frac{1}{2}S$
$\rho(g_1, g_{l+1}) \leq 2(S - \rho(g_0, g_1))$ par hypothèse de récurrence. Donc $\rho(g_1, g_{l+1}) \leq S$. Par 3), $\rho(g_0, g_{l+1}) \leq 2S$ donc $S \geq \frac{1}{2}\rho(g_0, g_{l+1})$.
Cas 2 : $\rho(g_l, g_{l+1}) \geq \frac{1}{2}S$ (même raisonnement).
Cas 3 : $\rho(g_0, g_1), \rho(g_l, g_{l+1}) < \frac{1}{2}S$:
On considère m le plus grand entier tel que $\sum_{i=0}^{m-1} \rho(g_i, g_{i+1}) \leq \frac{1}{2}S$ $(1 \leq m < l)$. Par hypothèse de récurrence, $\rho(g_0, g_m) \leq 2\sum_{i=0}^{m-1} \rho(g_i, g_{i+1}) \leq S$. $\sum_{i=0}^{m} \rho(g_i, g_{i+1}) > \frac{1}{2}S$ donc $\rho(g_0, g_{l+1}) \leq 2S$.
Donc d est une distance et $d(h,k) \geq \frac{1}{2}\rho(h,k)$, d est invariante à gauche car ρ l'est. Montrons que la topologie induite par d est la topologie de G.
Soient U un ouvert de G et $g \in G$
Il existe $n \in \mathbf{N}$ tekl que $gV_n \subset U$.
Soit $h \in \mathcal{B}(g, 2^{-n-1})$.

$d(h,g) < 2^{-n-1}$ donc $\rho(h,g) \leq 2d(h,g) < 2^{-n}$: $g^{-1}h \in V_n$. Donc $h \in gV_n \subset U$, U est un ouvert pour la topologie induite par d.
Soient U un ouvert pour la topologie induite par d et $g \in U$.
$\exists n \in \mathbf{N} : \mathcal{B}(g, 2^{-n}) \subset U$. Soit $h \in gV_{n+1}$.
$\rho(g,h) \leq 2^{-n-1}$ donc $d(g,h) \leq \rho(g,h) \leq 2^{-n-1} < 2^{-n}$. Donc $h \in u$ puis $gV_{n+1} \subset U$. U est un ouvert de G. □

Proposition 6.8
Soient G un groupe topologique séparable, métrisable avec une distance d invariante à droite et H un sous-groupe de G.
On pose $d^*(g_1H, g_2H) = \inf\{d(k_1,k_2) : k_1 \in g_1H, k_2 \in g_2H\}$.
d^* est une distance compatible avec la topologie de G/H.

Preuve. Montrons que d^* est une distance.
$d^*(g_1H, g_2H) = d^*(g_2H, g_1H)$ et $d^*(g_1H, g_2H) \leq d^*(g_1H, g_3H) + d^*(g_3H, g_2H)$ car d est une distance.
Soient $g_1H \neq g_2H$.
On suppose que $d^*(g_1H, g_2H) = 0$. Donc il existe $(h_{1,n}, h_{2,n}) \in H^{\mathbf{N}}$ telles que $d(g_1h_{1,n}, g_2h_{2,n}) \to_n 0$.
Donc $d(1_G, g_2h_{2,n}h_{1,n}^{-1}g_1^{-1}) \to_n 0$ soit $d(1_G, g_2h_ng_1^{-1}) \to_n 0$ avec $h_n = h_{2,n}h_{1,n}^{-1}$. $g_2h_ng_1^{-1} \to_n 1_G$ donc $h_n \to g_1g_2^{-1}$. H est fermé donc $g_1g_2^{-1} \in H$ puis $g_1 \in g_2H$ donc $g_1H = g_2H$.
Montrons que G/H est à base dénombrable de voisinages.
Soient $gH \in G/H$ et $(V_n)_n$ une base dénombrable de voisinages de g.
Alors $(\pi_H(V_n))_n$ est une base de voisinages dénombrable de gH. On peut donc utiliser la caractérisation séquentielle des fermés : $A \subset G/H$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(g_nH) \in A^{\mathbf{N}}$ qui converge pour d^* vers $gH \in G/H$, $gH \in A$.
Soient A un fermé pour la topologie de G/H et $(g_nH) \in A^{\mathbf{N}}$ une suite qui converge vers $gH \in G/H$ pour d^*. Donc $\forall k \in \mathbf{N}, \exists n_k \in \mathbf{N} : d^*(g_{n_k}H, gH) < 2^{-k}$. Or $d^*(g_{n_k}H, gH) = \inf\{d(x_1,x_2) : x_1 \in g_{n_k}H, x_2 \in gH\}$.
Donc par invariance de d, il existe $h_k \in H$ tel que $d(k_kg_{n_k}, g) < 2^{-k}$. Donc g est un point d'accumulation de $\pi_H^{-1}(A)$. A étant fermé dans $G/H, \pi_H^{-1}(A)$ est fermé dans G donc $g \in \pi_H^{-1}(A)$ soit $\pi_H(g) = gH \in A$. Donc A est fermé pour la topologie induite par d^*.
Soit A un fermé pour la topologie induite par d^*. Soit $(g_n) \in \pi_H^{-1}(A)^{\mathbf{N}}$ telle que $g_n \to_n g$:$d^*(g_nH, gH) \to_n 0$ et $g_nH \in A$ donc $gH \in A$ soit $g \in \pi_H^{-1}(A)$. □

Définition 6.9
Soient G un groupe topologique, f une fonction définie sur G.
On définit $L_yf : x \to f(y^{-1}x)$ et $R_yf : x \to f(xy)$.

Remarque 6.10
En définissant L_yf de cette forme, $L_{yz} = L_yL_z$.
De même $R_{yz} = R_yR_z$.

Définition 6.11
On dit que f est continue uniformément à gauche lorsque $\|L_yf - f\|_\infty \to_{y\to 1} 0$ et à droite lorsque $\|R_yf - f\|_\infty \to_{y\to 1} 0$.

Proposition 6.12
Si G est localement compact et $f \in C_c(G)$, alors f est continue uniformément à gauche et à droite.

Preuve. Cas de R_yf :
Soient $f \in C_c(G), \epsilon > 0, K = \operatorname{supp} f$.
Pour tout $x \in K$, il existe U_x un voisinage de 1 tel que $\forall y \in U_x, |f(xy) - f(x)| < \epsilon$ et il existe aussi V_x un voisinage symétrique de 1 tel que $V_xV_x \subset U_x$. $(XV_x)_{x\in K}$ forme un recouvrement ouvert de K qui est compact donc il existe $x_1..., x_n \in K$ tels que $K \subset \cup_{j=1}^n x_jV_{x_j}$. On pose $V = \cap_{j=1}^n V_{x_j}$, V est un voisinage de 1. Montrons que $\forall y \in V, \|R_yf - f\|_\infty < 2\epsilon$.
Soit $y \in V$. Si $x \in K$, alors il existe $j \in [|1,n|]$ tel que $x \in x_jV_{x_j}$ donc $x_j^{-1}x \in V_{x_j}$. Donc $xy = x_j^{-1}x_jxy \in x_jU_{x_j}$ et on a alors $|f(xy) - f(x)| \leq |f(xy) - f(x_j)| + |f(x) - f(x_j)| < 2\epsilon$
Si $xy \in K$, alors il existe $j \in [|1,n|]$ tel que $xy \in x_jV_{x_j}$ donc $|f(xy) - f(x)| < 2\epsilon$.
Si $x, xy \notin K, f(x) = f(xy) = 0$.
Donc $\forall y \in V, \|R_yf - f\|_\infty < 2\epsilon$ et f est uniformément continue à droite.
De même à gauche. □

6.2 Nombres p-adique

6.2.1 Définition et propriétés

Définition 6.13
Soit p un nombre premier.
Pour $r \in \mathbf{Q}^*$, on pose $|r|_p = p^{-m}$ avec $r = p^m q, m \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Q}$ tel que p ne divise pas le numérateur et le dénominateur de q et $|0|_p = 0$.

Proposition 6.14
$|\cdot|_p$ vérifie $|r_1 + r_2|_p \leq \max(|r_1|_p, |r_2|_p)$ donc $d_p : (r_1, r_2) \in \mathbf{Q}^2 \to |r_1 - r_2|_p$ définit une distance sur $\mathbf{Q}$.

Preuve. Soient $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$ tels que $r_1 = p^{m_1} q_1$ et $r_2 = p^{-m_2} q_2$. Supposons d'abord $m_1 \leq m_2$.
$r_1 + r_2 = p^{m_1} q_1 + p^{m_2} q_2 = p^{m_1}(q_1 + p^{m_2 - m_1} q_2)$.
Donc $|r_1 + r_2|_p = p^{-m_1}$.
Si $m_2 \leq m_1$, alors $|r_1 + r_2|_p = p^{-m_2}$.
Donc $|r_1 + r_2|_p \leq \max\{|r_1|_p, |r_2|_p\}$.
Montrons que d_p définit bien une distance sur $\mathbf{Q}$.
$d_p(r_1, r_2) \geq 0$ et si $d_p(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|_p = 0$, alors $r_1 = r_2$.
$d_p(r_1, r_2) = d_p(r_2, r_1)$.
Par ce qui précède, d_p vérifie l'inégalité trianguaire. □

Proposition 6.15
$+ : \mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q} : (x, y) \mapsto x + y$ est uniformément continue pour la topologie p-adique.
$\times : \mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q} : (x, y) \mapsto x \times y$ et $i : \mathbf{Q}^* \to \mathbf{Q}^* : x \mapsto x^{-1}$ sont uniformément continue sur les compacts pour la topologie p-adique.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$.
On pose $\delta = \epsilon/2$ et on considère $(x, y), (x', y') \in \mathbf{Q}^2$ tels que $\max\{|x - x'|_p, |y - y'|_p\} \leq \delta$. Alors $|x + y - (x' + y')|_p \leq |x - x'|_p + |y - y'|_p \leq 2\delta \leq \epsilon$. Donc l'addition est uniformément continue sur $\mathbf{Q}^2$ pour la topologie p-adique.
Soit K un compact de $\mathbf{Q}^2$ bornée par $M : \forall (x, y) \in K, \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq M$. On pose $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$ et on considère $(x, y), (x', y') \in K$ tels que $\max\{|x - x'|_p, |y - y'|_p\} \leq \delta$.
Alors $|xy - x'y'|_p = |(x - x')y + (y - y')x|_p \leq \delta(|x'|_p + |y|_p) \leq 2\delta M \leq \epsilon$. Donc la multiplication est uniformément continue sur tout compact de $\mathbf{Q}^2$.
Soit K un compact de $\mathbf{Q}^*$ tel que $\forall x \in K, m \leq |x|_p \leq M$. On pose maintenant $\delta = m^2 \epsilon$ et on considère $x, x' \in K$ tels que $|x - x'|_p \leq \delta$.
Alors $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}|_p = \frac{|x - x'|_p}{|x|_p |x'|_p} \leq \frac{\delta}{m^2} \leq \epsilon$. Donc l'inversion est uniformément continue sur tout compact de $\mathbf{Q}^*$. □

Définition 6.16
On définit alors $\mathbf{Q}_p$ comme le complété de $(\mathbf{Q}, d_p)$.

Proposition 6.17
$\mathbf{Q}_p$ est un corps.

Preuve. L'application $+ : \mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q} : (x, y) \mapsto x + y$ est uniformément continue pour la topologie p-adique et $(\mathbf{Q}, |\cdot|_p)$ est dense dans $\mathbf{Q}_p$ qui est complet. On peut donc prolonger l'addition en une application continue sur $\mathbf{Q}_p$ pour la topologie p-adique.
Soit K un compact de $\mathbf{Q}$.
L'application $\times : \mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q} : (x, y) \mapsto x \times y$ est uniformément continue sur K à valeurs dans un compact (image directe de K compact par l'application continue $\times$) donc complet. On peut donc prolonger la multiplication en une application continue sur tout compact de $\mathbf{Q}_p$. La continuité étant une propriété locale, la multiplication est contine sur tout $\mathbf{Q}_p$ pour la topologie p-adique. De même pour l'inversion.
Par passage à la limite, on vérifie que $(\mathbf{Q}_p, +, \times)$ vérifie les axiomes de corps. □

Proposition 6.18
Si $m \in \mathbf{Z}$ et $c_j \in [|0, p - 1|]$, alors $\sum_{j \geq m} c_j p^j$ converge dans $\mathbf{Q}_p$.
De plus, tout nombre p-adique s'écrit de manière unique comme la somme d'une telle série, donc $\mathbf{Q}_p = \{\sum_{j \geq m} c_j p^j : m \in \mathbf{Z}, c_j \in [|0, p - 1|]\}$.

Preuve. $\forall N \leq M, |\sum_{j \geq N} c_j p^j - \sum_{j \geq M} c_j p^j|_p = |\sum_{j=N}^{M-1} c_j p^j|_p \to_n 0$ donc la suite des sommes partielles est de Cauchy dans $\mathbf{Q}_p$ qui est complet. Donc $\sum_{j \geq m} c_j p^j$ converge dans $\mathbf{Q}_p$.

On pose $K = \{\sum_{j\geq m} c_j p^j : m \in \mathbf{Z}, c_j \in [|0, p-1|]\}$ et on définit l'addition sur K terme à terme en gardant chaque coefficient dans $[|0, p-1|]$. Exemple : $(1+2p) + ((p-1) + (p-4)p) = (p-1)p$.
De même pour la multiplication. $(K, +, \times)$ forme ainsi un corps.
Montrons que $K = \{\sum_{j\geq m} c_j p^j : m \in \mathbf{Z}, c_j \in [|0, p-1|]\}$ est complet, ainsi, on aura que $K = \mathbf{Q}_p$.
Soit $(x_n) \in K^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy avec $x_n = \sum_j c_j^n p^j$.
Alors $\forall k \in \mathbf{N}, \exists N \in \mathbf{N} / \forall n_1, n_2 > N, |x_{n_1} - x_{n_2}|_p < p^{-k}$. Donc $\forall j \leq k, c_j^{n_1} = c_j^{n_2}$. Donc à partir d'un certain rang N, les coefficients à j fixés sont constant. On pose alors pour $j \in \mathbf{N}$: $c_j = \lim_n c_j^n$. (x_n) converge vers $\sum_j c_j p^j$. □

Proposition 6.19
Soient $r > 0, x \in \mathbf{Q}_p$.
i) $\bar{\mathcal{B}}(x, r)$ est ouverte.
ii) Tout point de $\bar{\mathcal{B}}(x, r)$ en est un centre.
iii) Si $\bar{\mathcal{B}}(x, r) \cap \bar{\mathcal{B}}(x', r') \neq \emptyset$, alors $\bar{\mathcal{B}}(x, r) \subset \bar{\mathcal{B}}(x', r')$ ou $\bar{\mathcal{B}}(x', r') \subset \bar{\mathcal{B}}(x, r)$.

Preuve. i) La norme $|\cdot|_p$ ne prend que les valeurs $p^k, k \in \mathbf{Z}$ et 0 donc $\exists \epsilon > 0$ tel que $|x-y|_p \leq r \iff |x-y|_p < r + \epsilon$. Donc $\overline{\mathcal{B}}(x, r)$ qui est fermé est aussi ouverte.
ii) Si $|x-y|_p \leq r$ et $|y-z|_p \leq r$, alors $|x-z|_p \leq r$ par l'inégalité triangulaire ultramétrique. Donc tout point de la boule en est un centre.
iii) On suppose que $\bar{\mathcal{B}}(x, r) \cap \bar{\mathcal{B}}(x', r') \neq \emptyset$ et $r \leq r'$
Soient $y \in \bar{\mathcal{B}}(x, r)$ et $z \in \bar{\mathcal{B}}(x, r) \cap \bar{\mathcal{B}}(x', r')$
$|x-y| \leq r, |x-z|_p \leq r, |x'-z|_p \leq r'$ donc $|x'-y| = |x'-z+z-y| \leq \max\{r', r\} = r'$ donc $y \in \bar{\mathcal{B}}(x', r')$. □

Définition 6.20
On définit l'anneau des entiers p-adiques noté $\mathbf{Z}_p$ comme étant la boule unité fermée dans $\mathbf{Q}_p$: $\mathbf{Z}_p = \bar{\mathcal{B}}(0, 1)$.

Proposition 6.21
i) $\mathbf{Z}_p = \{\sum_{j\geq 0} c_j p^j : c_j \in [|0, p-1|]\} \cong [|0, p-1|]^{\mathbf{N}}$.
ii) $\mathbf{Z}_p$ est compact. iii) $\mathbf{Z}_p$ est le complété de $\mathbf{Z}$ pour la distance p-adique.

Preuve. i) Si $x = \sum_{j\geq 0} c_j p^j$, alors $x \in \bar{\mathcal{B}}(0, 1)$.
Soit $x \in \bar{\mathcal{B}}(0, 1)$.
$d(x, 0) \leq 1$ or $d(x, 0) = |x|_p = p^{-m}$ en écrivant $x = p^m q$ donc $p^{-m} \leq 1$. On peut alors écrire $x = \sum_{j\geq m} c_j p^j$.
Si $m < 0$, alors $|x|_p = p^{-m} > 1$ ce qui est absurde. Donc $m \geq 0$.
ii) D'après *i*), $Z_p = [|0, p-1|]^{\mathbf{N}}$ donc $\mathbf{Z}_p$ est compact en tant que produit de compacts.
iii) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Z}_p$ est complet.
Soit $x \in \mathbf{Z}_p, x = \sum_{j\geq 0} c_j p^j$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $x_n = \sum_{j=0}^{n} c_j p^j$. Alors $x_n \in \mathbf{Z}$ et $x_n \to x$ pour la valeur absolue p-adique car $|x - x_n|_p = |\sum_{j\geq n+1} c_j p^j|_p \leq p^{-(n+1)}$. □

Proposition 6.22
$p\mathbf{Z}_p = \bar{\mathcal{B}}(0, 1/p)$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Z}_p = \overline{\mathcal{B}}(0, 1)$ est l'union disjointe de p boules de rayon p^{-1}.

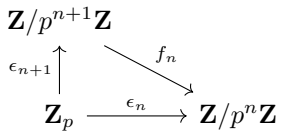
Preuve. $\bar{\mathcal{B}}(0, 1/p) \subset p\mathbf{Z}_p$. Si $x = py$ avec $y \in \mathbf{Z}_p$, alors $x = \sum_{j\geq 1} c_j p^j$ donc $|x|_p \leq 1/p$. D'ou $p\mathbf{Z}_p = \bar{\mathcal{B}}(0, 1/p)$.
De plus, $\mathcal{B}(0, 1/p)$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}_p$ car $\mathcal{B}(0, 1/p) \subset \mathbf{Z}_p$ et $\forall x, y \in \mathbf{Z}_p, |x-y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq 1/p$.
Donc $p\mathbf{Z}_p = \bar{\mathcal{B}}(0, 1/p)$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}_p$.
On pose $\epsilon : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ la réduction mod p : $\epsilon(\sum_{i\geq 0} a_i p^i) = a_0$.
ϵ est un morphisme de groupes surjectif et $\ker(\epsilon) = p\mathbf{Z}_p$ donc $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
Donc $\mathbf{Z}_p = \sqcup_{k=0}^{p-1}(x_k + p\mathbf{Z}_p) = \sqcup_{k=0}^{p-1}\overline{\mathcal{B}}(x_k, 1/p)$. □

Proposition 6.23
$(\mathbf{Q}_p, +)$ et $(\mathbf{Q}_p \setminus \{0\}, \times)$ sont localements compacts.

Preuve. $\mathbf{Z}_p$ est compact donc toute boule est compacte. On obtient donc que $\mathbf{Q}_p$ est localement compact. □

6.2.2 Limite inverse

On peut voir les entiers p-adiques d'une manière différente :
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $G_n = \mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}$ et pour $f_n : G_n \to G_{n-1}$ morphisme canonique. Alors f_n est surjective.
On pose $\epsilon_n : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ la réduction modulo p^n. Pour $x = \sum_{i\geq 0} a_i p^i \in \mathbf{Z}_p$, on a alors $\epsilon_n(x) = \sum_{0\leq i<n} a_i p^i$ donc $\epsilon_n(x) \to_n x$. On aimerait donc dire que "$\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ converge vers $\mathbf{Z}_p$. On peut aussi le voir sur le diagramme commutatif suivant :



Définition 6.24
On appelle limite inverse de (G_n, f_n) et on note $\varprojlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ l'ensemble $G = \{(x_n)_n : \forall n \in \mathbf{N}, x_n = f_n(x_{n+1})\}$.

Proposition 6.25
La fonction $\mathbf{Z}_p \to \varprojlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ qui a tout nombre p-adique $x = \sum_{i\geq 0} a_i p^i$ associe la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n = \sum_{i<n} a_i p^i$ est un homéomorphisme.

Preuve. $x_1 = a_0, x_2 = a_0 + a_1 p, ..., x_n = a_0 + a_1 p + ... + a_{n-1}p^{n-1}$ donc $a_0 = x_1, a_1 = \frac{x_2 - x_1}{p}, ..., a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{p^n}$. Ainsi la fonction donnée est une bijection. Mais elle est continue et définie sur un compact donc c'est un homéomorphisme. □

Proposition 6.26
$\mathbf{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}_p)$.

Preuve. $\mathbf{Q}_p = \{\sum_{j=m}^{+\infty} c_j p^j : m \in \mathbf{Z}, c_j \in [|0, p-1|]\}$ et $\mathbf{Z}_p = \{\sum_{j=m}^{+\infty} c_j p^j : m \in \mathbf{N}, c_j \in [|0, p-1|]$. Si $x = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j p^j$ avec $m < 0$, alors on écrit $x = p^m \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+m} p^j = p^m y$ avec $y \in \mathbf{Z}_p$ et $p^{-m} \in \mathbf{Z}_p^\times$. D'ou le résultat. □

6.3 Mesure de Haar

Dans cette partie, on supposera que les groupes topologiques sont métrisables et séparables. Dans ce contexte, les mesures de Borel sont des mesures de Radon et elles sont régulières. Nous allons généraliser ce qu'on connaît sur la mesure de Lebesgue aux groupes localements compacts.

6.3.1 Définitions et propriétés

Définition 6.27
Pour G un groupe localement compact, on pose $C_c^+(G = \{f \in C_c(G) : f \geq 0, f \neq 0\}$.

Remarque 6.28
Les parties positive et négative d'une fonction continues sont continues donc $\mathrm{Vect}(C_c^+(G)) = C_c(G)$.

Définition 6.29
Une mesure de Haar à gauche sur G est une mesure de Radon vérifiant : $\forall g \in G, \forall B \in \mathcal{B}(G), \mu(gB) = \mu(B)$.
Une mesure de Haar à droite sur G est une mesure de Radon vérifiant : $\forall g \in G, \forall B \in \mathcal{B}(G), \mu(Bg) = \mu(B)$.

Dans cette partie on considère les mesures de Haar à gauche par défaut.

Définition 6.30
Soient G un groupe localement compact et μ une mesure de Radon sur G.
On définit $\tilde{\mu}$ par $\tilde{\mu}(B) = \mu(B^{-1})$.
i) μ est une mesure de Haar à gauche si et seulement si $\tilde{\mu}$ est une mesure de Haar à droite.
ii) μ est une mesure de Haar à gauche si et seulement si $\forall f \in C_c^+(G), \forall y \in G, \int L_y f d\mu = \int f d\mu$.

Preuve. i) Si μ est une mesure de Haar à gauche, alors $\forall x \in G, \forall B \in \mathcal{B}(G), \tilde{\mu}(Bx) = \mu((Bx)^{-1}) = \mu(x^{-1}B^{-1}) = \mu(B^{-1}) = \tilde{\mu}(B)$ donc $\tilde{\mu}$ est une mesure de Haar à droite. De même dans l'autre sens.
ii) On note μ_y la mesure sur G telle que $\mu_y(E) = \mu(yE)$. Si μ est une mesure de Haar à gauche, alors $\mu = \mu_y$ donc $\int L_y f d\mu = \int f d\mu_y = \int f d\mu$ pour $f \in C_c^+(G)$ et $y \in G$.
Réciproquement, si $\forall f \in C_c^+(G), y \in G, \int L_y f d\mu = \int f d\mu_y$, alors c'est aussi vraie pour toute fonction $f \in C_c(G)$ et par l'unicité dans le théorème de Riesz, $\mu = \mu_y$ donc μ est une mesure de Haar à gauche. □

6.3.2 Existence et (presque) unicité

Pour montrer l'existence de la mesure de Haar, on va chercher à construire une forme linéaire sur $C_c(G)$ pour appliquer le théorème 5.21. La meure de Haar sera la mesure associée à cette forme linéaire par le théorème 5.21.

Définition 6.31
Pour $f, \phi \in C_c^+(g)$, on pose $(f:\phi) = \inf\{\sum_{j=1}^n c_j : c_j \geq 0 / \exists x_1, ..., x_n \in G$ tels que $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi\}$.

Remarque 6.32
Montrons que cette borne inférieure est bien définie.
On pose $U = \{x \in G : \phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|_\infty\}$. Alors $(xU)_{x\in G}$ forme un recouvrement ouvert de $\operatorname{supp} f$ *qui est compact donc il existe $x_1, ...x_N \in G$ tels que* $\operatorname{supp} f \subset \cup_{j=1}^N x_j U$. *Pour $j \in [|1, N|]$, on pose $c_j = 2\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$.*
Soient $x \in$ $\operatorname{supp} f$ *et $j \in [|1, n|]$ tel que $x \in x_j U$.*
Alors $L_{x_j}\phi(x) = \phi(x_j^{-1}x) > \frac{1}{2}\|\phi\|_\infty$ donc $c_j L_{x_j}\phi(x) > \|f\|_\infty$ et $f(x) \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi(x)$. Ainsi la borne inférieure est bien définie et $(f:\phi) \leq 2N\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$.

Proposition 6.33
Pour $f, g, \phi \in C_c^+(G)$, on a :
1) $\forall y \in G, (f:\phi) = (L_y f : \phi)$
2) $(f+g:\phi) \leq (f:\phi) + (g:\phi)$
3) $\forall c > 0, (cf:\phi) = c(f:\phi)$
4) Si $f \leq g$, alors $(f:\phi) \leq (g:\phi)$
5) $\|f\|_\infty / \|\phi\|_\infty \leq (f:\phi)$
6) $\forall \psi \in C_c^+(G), (f:\phi) \leq (f:\psi)(\psi:\phi)$

Preuve. 1) Soit $y \in G$.
Si $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$, alors en posant $y_j = yx_j$ pour $j \in [|1, n|]$, on a $L_y f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{y_j}\phi$ donc $(L_y f:\phi) \leq \sum_{j=1}^n c_j$ puis $(L_y f:\phi) \leq (f:\phi)$. De même dans l'autre sens. 2) Si $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$ et $g \leq \sum_{j=1}^m d_j L_{y_j}\phi$, alors $f+g \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi + \sum_{j=1}^m d_j L_{y_j}\phi$ donc $(f+g:\phi) \leq \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{j=1}^m d_j$. Enfin $(f+g:\phi) \leq (f:\phi) + (g:\phi)$.
3) Soit $c > 0$.
Si $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$, alors $cf \leq \sum_{j=1}^n cc_j L_{x_j}\phi$ donc $(cf:\phi) \leq c\sum_{j=1}^n c_j$ puis $(cf:\phi) \leq c(f:\phi)$. De même dans l'autre sens.
4) Si $f \leq g$ et $g \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$, alors $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$ donc $(f:\phi) \leq (g:\phi)$
5) Si $f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi$, alors $\|f\|_\infty \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\phi \leq \sum_{j=1}^n c_j \|\phi\|_\infty$. Donc $\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} \leq \sum_{j=1}^n c_j$ puis $\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} \leq (f:\phi)$.
6) Soit $\psi \in C_c^+(G)$.
Si $f \leq \sum_i c_i L_{x_i}\psi$ et $\psi \leq \sum_j b_j L_{y_j}\phi$, alors $f \leq \sum_i c_i \sum_j b_j L_{x_i y_j}\phi$ donc $(f:\phi) \leq \sum_i c_i \sum_j b_j$. Donc $(f:\phi) \leq (f:\psi)(\psi:\phi)$. □

Lemme 6.34
Soient $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ et $\epsilon > 0$.
Il existe un voisinage V de 1 dans G tel que $(f_1:\phi) + (f_2:\phi) \leq (f_1+f_2:\phi) + \epsilon$ avec $\phi \in C_c^+(G)$ telle que $\operatorname{supp}(\phi) \subset V$.

Preuve. Soient $g \in C_c^+(G)$ telle que $g = 1$ sur $\operatorname{supp}(f_1+f_2)$ et $\delta > 0$ à déterminer.
On pose $h = f_1 + f_2 + \delta g$ et $h_i = f_i/h$ pour $i \in \{1, 2\}$. $h_1, h_2 \in C_c^+(G)$ donc sont uniformément continues à droite et à gauche donc il existe V un voisinage de 1 tel que si $y \in G$ avec $y^{-1}x \in G, |h_i(x) - h_i(y)| < \delta$.
On suppose que $\phi \in C_c^+(G)$ et $\operatorname{supp}(\phi) \subset V$. Si $h \leq \sum_j c_j L_{x_j}\phi$, alors :
$f_i(x) = h(x)f_i(x) \leq \sum_j c_j \phi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leq \sum_j c_j \phi(x_j^{-1}x)(h_i(x_j) + \delta)$ car lorsque $x_j^{-1}x \in \operatorname{supp}(f)$, alors $|h_i(x) - h_i(x_j)| < \delta$. Et comme $h_1 + h_2 \leq 1$, on a :
$(f_1:\phi) + (f_2:\phi) \leq \sum c_j(h_1(x_j) + \delta) + \sum c_j(h_2(x_j) + \delta) \leq \sum c_j(1 + 2\delta)$
Donc $(f_1:\phi) + (f_2:\phi) \leq (1+2\delta)(h:\phi) \leq (1+2\delta)((f_1+f_2:\phi) + \delta(g:\phi))$. On prend $\delta > 0$ tel que $\delta((g:\phi) + 2(f_1+f_2:\phi) + 2\delta(g:\phi)) < \epsilon$ et on a alors : $(f_1:\phi) + (f_2:\phi) \leq (f_1+f_2:\phi) + \epsilon$. □

On a presque une forme linéaire positive invariante par translations à gauche. Un argument de compacité permettra d'obtenir exactement la forme linéaire recherchée.

Théorème 6.35
Tout groupe localement compact G admet une mesure de Haar λ.

Preuve. Soient $f, \phi \in C_c^+(G)$.
Soit $f_0 \in C_c^+(G)$.
On pose $I_\phi(f) = \frac{(f:\phi)}{(f_0:\phi)}$. D'après $(1), (2), (3), (4), I_\phi$ est invariante à gauche, sous-additive, homogène de degré 1 et monotone. D'après $(6), I_\phi$ satisfait $(f_0 : f)^{-1} \leq I_\phi(f) \leq (f : f_0)$. Pour $f \in C_c^+(G)$, on pose

$X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$ et $X = \Pi_{f \in C_c^+(G)} X_f$. Un élément de X est une fonction $I : C_c^+(G) \to]0, +\infty[$ telle que $I(f) \in X_f$. Donc $\forall \phi \in C_c^+(G), I_\phi \in X$. Chaque X_f est compact donc X est compact. Pour tout voisinage V de 1 dans G, on pose $K(V) = \{I_\phi : \operatorname{supp}\phi \subset V\}$. Alors $K(\cap_{j=1}^n V_j) \subset \cap_{j=1}^n K(V_j)$ donc par compacité de X, $\cap_V K(V) \neq \emptyset$ donc il existe $I \in \cap_V K(V)$.
Soient V un voisinage de 1 dans G et U un ouvert de X contenant I.
Alors $K(V) \cap U \neq \emptyset$ donc $\exists \phi \in C_c^+(G)$ telle que $I_\phi \in U$. Or $\{I_\phi \in X : \forall j \in [|1, n|], |I(f_j) - I_\phi(f_j)| < \epsilon\}$ est un ouvert élémentaire de X contenant I, donc on peut prendre $U = \{I_\phi \in X : \forall j \in [|1, n|], |I(f_j) - I_\phi(f_j)| < \epsilon\}$.
Donc pour tout voisinage de 1, $\forall \epsilon > 0 \forall f_1, ..., f_n \in C_c^+(G), \exists \phi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}\phi \subset V : \forall j \in [|1, n|], |I(f_j) - I_\phi(f_j)| < \epsilon$
Soient $f, g \in C_c^+(G)$ et $\epsilon > 0$.
$|I(L_y f) - I(f)| \leq |I(L_y f) - I_\phi(L_y f)| + |I(f) - I_\phi(f)| \leq 2\epsilon$ donc $I(L_y f) = I(f)$. De la même manière, on montre que $I(f + g) = I(f) + I(g)$ et $\forall c > 0, I(cf) = cI(f)$.
Soit $f \in C_c(G)$.
Alors on peut écrire f sous la forme $f = f^+ - f^-$ avec $f^+, f^- \in C_c^+(G)$. Si $f = g - h$ avec $g, h \in C_c^+(G)$, alors $f^+ - f^- = g - h$ donc $f^+ + h = g + f^-$ puis $I(f^+) + I(h) = I(g) + I(f^-)$.
On peut donc étendre I sur $C_c(G)$ de la manière suivante $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$.
I est donc une forme linéaire positive sur $C_c(G)$ qui commute avec les translations à gauche. Par le théorème 5.21, il existe une mesure borélienne λ finie sur les compacts et régulière telle que $\forall f \in C_c(G), I(f) = \int f d\lambda$.
De plus $\forall f \in C_c(G), I(L_y f) = I(f)$ donc $\int L_y f d\lambda = \int f d\lambda$.$\lambda$ est une mesure de Haar sur G. □

Proposition 6.36
Soit λ une mesure de Haar sur G.
Pour tout ouvert non vide U de G $\lambda(U) > 0$ et $\forall f \in C_c^+(G), \int f d\lambda > 0$.

Preuve. Soit U un ouvert non vide de G et on suppose que $\lambda(U) = 0$.
Alors $\forall x \in G, \lambda(xU) = 0$.
O tout compact K de G peut être recouvert par un nombre finis de translations de U donc $\lambda(K) = 0$, mais par régularité intérieure de λ : $\lambda(G) = 0$: absurde car $\lambda \neq 0$.
Soit $f \in C_c^+(G)$.
On pose $U = \{x \in G : f(x) > \frac{1}{2}\|f\|_\infty\}$. U est un ouvert de G et $\int f d\lambda > \frac{1}{2}\|f\|_\infty \lambda(U) > 0$. □

Théorème 6.37
Si λ, μ sont deux mesures de Haar sur G, alors il existe $c > 0$ tel que $\mu = c\lambda$.

Preuve. D'après la proposition précédente : $\forall f \in C_c^+(G), \int f d\mu > 0$. Pour montrer le résultat, on peut alors montrer que : $\forall f, g \in C_c^+(G), \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} = \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu}$.
Soient $f, g \in C_c^+(G)$ et V_0 un voisinage symétrique compact de 1.
On pose $A = \operatorname{supp}(f)V_0 \cup V_0 \operatorname{supp}(f)$ et $B = \operatorname{supp}(g)V_0 \cup V_0 \operatorname{supp}(g)$. Alors A et B sont compacts $\forall y \in V_0, x \mapsto f(xy) - f(yx)$ respectivement $x \mapsto g(xy) - g(yx)$ sont de support inclus dans A respectivement B.
Soit $\epsilon > 0$.
Par la proposition 6.36, il existe $V \subset V_0$ un voisinage symétrique de 1 tel que $\forall x \in G, y \in V, |f(xy) - f(yx)| < \epsilon$ et $|g(xy) - g(yx)| < \epsilon$.
Soit $h \in C_c^+(G)$ telle que $h(x) = h(x^{-1})$ et $\operatorname{supp}(h) \subset V$.
Alors par théorème de Fubini (toutes les fonctions sont continues à support compacts) :

$$\begin{aligned}
\int h d\mu \int f d\lambda &= \iint h(y) f(x) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(y) f(yx) d\lambda(x) d\mu(y) \\
\int h d\lambda \int f d\mu &= \iint h(x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(y^{-1}x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(x^{-1}y) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(y) f(xy) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(y) f(xy) d\lambda(x) d\mu(y)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}|\int hd\lambda \int fd\mu - \int hd\mu \int fd\lambda| &= |\iint_{G\times G} h(y)(f(xy)-f(yx)d\mu(y)d\lambda(x)| \\ &= |\int_A \int_V h(y)(f(xy)-f(yx))d\mu(y)d\lambda(x)| \\ &\leq \epsilon|\int_A \int_V h(y)d\mu(y)d\lambda(x)| \\ &\leq \epsilon\lambda(A)\int hd\mu\end{aligned}$$

De même : $|\int hd\lambda \int gd\mu - \int hd\mu \int gd\lambda| \leq \epsilon\lambda(B)\int hd\mu$ Donc en divisant ces inégalités par $\int hd\mu \int fd\mu$ et $\int hd\mu \int gd\mu$, on obtient :
$|\frac{\int hd\lambda}{\int hd\mu} - \frac{\int fd\lambda}{\int fd\mu}| \leq \epsilon\frac{\lambda(A)}{\int f\mu}$ et $|\frac{\int hd\lambda}{\int hd\mu} - \frac{\int gd\lambda}{\int gd\mu}| \leq \epsilon\frac{\lambda(B)}{\int gd\mu}$.
Donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int fd\lambda}{\int fd\mu} - \frac{\int gd\lambda}{\int gd\mu}\right| &\leq \left|\frac{\int fd\lambda}{\int d\mu} - \frac{\int hd\lambda}{\int hd\mu}| + |\frac{\int hd\lambda}{\int hd\mu} - \frac{\int gd\lambda}{\int gd\mu}\right| \\ &\leq \epsilon\left(\frac{\lambda(A)}{\int fd\mu} + \frac{\lambda(B)}{\int gd\mu}\right)\end{aligned}$$

On a donc $\frac{\int fd\lambda}{\int fd\mu} = \frac{\int gd\lambda}{\int gd\mu}$. □

6.3.3 Calculs de mesures de Haar

On sait déjà que la mesure de Lebesgue est une mesure de Haar sur $\mathbf{R}$ et en fixant que la mesure de $[0,1]$ est 1 on assure l'unicité. Nous allons voir comment calculer concrètement une mesure de Haar sur un groupe localement compact lorsque ce groupe est homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 6.38
On suppose que G est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et que $\forall x \in G, \exists A(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n), b(x) \in \mathbf{R}^n : \forall y \in G, xy = A(x)(y) + b(x)$.
Alors en notant dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, $|\det(A(x))|^{-1}dx$ est une mesure de Haar à gauche sur G.

Exemple 6.39
Voici quelques exemples de groupes qui vérifient ces hypothèses :
i) $\mathbf{R}^*$.
ii) $\mathbf{C}^*$.
iii) Les matrices triangulaires supérieures de coefficients diagonaux égaux à 1.
iv) $GL_n(\mathbf{R})$.
v) $G = \{x \mapsto ax + b : a > 0, b \in \mathbf{R}\}$.

Preuve. On pose $d\lambda = |\det(A(x))|^{-1}dx$.
Commencons par montrer que $\forall x, y \in G, A(xy) = A(x)A(y)$. Soient $x, y, z \in G$.
D'une part $(xy)z = A(xy)(z) + b(xy)$.
D'autre part $x(yz) = A(x)(yz) + b(x) = A(x)(A(y)(z) + b(y)) + b(x) = A(x)(A(y)(z)) + A(x)(b(y)) + b(x)$.
Donc avec $z = 0$, on obtient $b(xy) = A(x)b(y) + b(x)$. Donc $A(xy) = A(x)A(y)$.
Soit $f \in C_c^+(G)$.

$$\begin{aligned}\int fd\lambda &= \int f(x)|\det(A(x))|^{-1}dx \\ &= \int f(y^{-1}x)|\det(A(y^{-1}x))|^{-1}|\det(A(y^{-1}))|dx \\ &= \int L_y f(x)|\det(A(y^{-1}))|^{-1}|\det(A(x))|^{-1}|\det(A(y^{-1}))|dx \\ &= \int L_y fd\lambda\end{aligned}$$

□

Proposition 6.40
i) $dx/|x|$ est une mesure de Haar sur le groupe mutliplicatif $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.
ii) $dxdy/(x^2+y^2)$ est une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
iii) La mesure de Lebesgue $\Pi_{i<j}d\alpha_{ij}$ sur $\mathbf{R}^{n(n-1)/2}$ est une mesure de Haar à gauche et à droite sur le groupe des matrices triangulaires supérieures de coefficients diagonaux égaux à 1.
iv) En notant dX la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{n^2}$, $|\det(X)|^{-n}dX$ est une mesure de Haar à gauche et à droite sur $GL_n(\mathbf{R})$.
v) $dadb/a^2$ est une mesure de Haar à gauche sur le groupe $G=\{x\mapsto ax+b : a>0, b\in\mathbf{R}\}$.

Preuve. i) Soit $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.
$A(x): y\mapsto xy$ donc $\det(A(x))=x$.
ii) Soit $x+iy\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
$(x+iy)(x'+iy')=xx'-yy'+i(xy'+x'y)$ donc $A(x+iy): x'+iy'\mapsto xx'-yy'+i(xy'+x'y)$ soit $A(x+iy)=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$ donc $\det(A(x))=x^2+y^2$.
iii) On pose $G=\{(x_{ij}) : \forall i\geq j, x_{ij}=\delta_{ij}\}$. Soient $X,Y\in G$.
$\forall i<j, (XY)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}y_{kj}=\sum_{k=i}^{j}x_{ik}y_{kj}=y_{i,j}+x_{i,i+1}y_{i+1,j}+...+x_{i,j-1}y_{j-1,j}+x_{i,j}$.
$c_{12}=y_{12}+x_{12}, c_{13}=y_{13}+x_{12}y_{23}+x_{13}, c_{14}=y_{14}+x_{12}y_{24}+x_{13}y_{34}+x_{14}, ..., c_{1n}=y_{1n}+\sum_{k=2}^{n-1}x_{1k}y_{kn}+x_{1n}$
$c_{23}=y_{23}+x_{23}, c_{24}=y_{24}+x_{23}y_{34}+x_{24}, ..., c_{2n}=y_{2n}+\sum_{k=3}^{n-1}x_{2k}y_{kn}+x_{2n}$
...
$c_{n-1,n}=y_{n-1,n}+x_{n-1,n}$
On écrit uniquement le cas $n=3$ pour plus de lisibilité.
En écrivant les éléments de G sous la forme (y_{12},y_{13},y_{23}), on obtient : $(x_{12},x_{13},x_{23})(y_{12},y_{13},y_{23})=(y_{12},y_{13}+x_{12}y_{23},y_{23})+(x_{12},x_{13},x_{23})$.
Donc $A(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & x_{12}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det(A(X))=1$.
iv) Soient $X,Y\in GL_n(\mathbf{R})$.
On note $Y^1,...,Y^n$ les colonnes de y, donc $Y=\begin{pmatrix}Y^1 & Y^2 & ... & Y^n\end{pmatrix}$. On a alors $XY=\begin{pmatrix}XY^1 & XY^2 & ... & XY^n\end{pmatrix}$.
Donc $\det(A(X))=\det(X)^n$.
v) $G\cong\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}$. Soient $(a,b),(a',b')\in G$.
$(a,b)(a',b')=(aa',ab'+b)$ donc $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$. $\det(A(a,b))=a^2$. □

Voici un exemple différent ou la mesure de Haar ne se calcule pas grâce à la proposition 6.38.

Proposition 6.41
Soit p premier.
$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un groupe topologique compact et $\lambda=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\delta_k$ est une mesure de Haar sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Preuve. G est un groupe discret (muni de la topologie discrète) fini donc compact. On peut réecrire λ sous la forme suivante : $\forall A\subset\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \lambda(A)=\mathrm{card}(A)/p$. Soient $A\subset\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, x\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
$\lambda(x+A)\,\mathrm{card}(x+A)=\mathrm{card}(A)=\lambda(A)$ donc λ est bien une mesure de Haar sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. □

Remarque 6.42
Plus généralement, pour un groupe fini G muni de la topologie discrète, G est compacte et une mesure de Haar sur G est la mesure de comptage normalisée.

Exemple 6.43
Soit λ la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$ telle que $\lambda(\mathbf{Z}_p)=1$.
Donc $\forall x\in\mathbf{Q}_p, \lambda(\overline{B}(x,1))=1$.
Si $m>0$, alors $\overline{B}(x,p^k)$ est une réunion disjointe de p^m boules de rayons 1 et une boule de rayon 1 est union disjointe de p^m boules de rayons p^{-m}. Donc $\lambda(\overline{B}(x,p^m))=p^m$. Maintenant qu'on connait la mesure d'une boule, on peut en déduire la mesure de tout ouvert (car tout ouvert est une réunion de boules disjointes).

6.4 Fonction modulaire

Jusqu'a maintenant on a considéré des mesures de Haar à gauche, mais on peut aussi considérer des mesures de Haar à droite. Le lien entre les deux se fait via la fonction modulaire.

Proposition 6.44
Soient G un groupe localement compact et λ une mesure de Haar sur G.
Pour $x \in G$ et E borélien de G, on pose $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$.
Il existe $\Delta(x) > 0$ indépendant de λ tel que $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$.

Preuve. λ, λ_x sont deux mesures de Haar sur G donc il existe $\Delta_\lambda(x) > 0$ tel que $\lambda_x = \Delta_\lambda(x)\lambda$. Si μ est une mesure de Haar sur G, alors par théorème 6.37, il existe $c > 0$ tel que $\mu = c\lambda$. Alors $\mu_x = c\lambda_x$.
Donc :

$$\begin{aligned} \mu_x &= c\lambda_x \\ \Delta_\mu(x)\mu &= c\Delta_\lambda(x)\lambda \\ \Delta_\mu(x) &= \Delta_\lambda(x) \end{aligned}$$

□

Définition 6.45
$\Delta : G \to]0, +\infty[$ *est appelé fonction modulaire sur G.*

Proposition 6.46
Δ est un morphisme continu de G dans $(\mathbf{R}_+^*, \times)$.
De plus : $\forall f \in L^1(G), \int R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda$.

Preuve. Soient $x, y \in G$ et E un borélien de G.

$$\begin{aligned} \Delta(xy)\lambda(E) &= \lambda(Exy) \\ &= \Delta(y)\lambda(Ex) \\ &= \Delta(x)\Delta(y)\lambda(E) \end{aligned}$$

Donc Δ est un morphisme de G dans $\mathbf{R}_*^+$.
Si $f = \chi_E$:

$$\begin{aligned} \int R_y f d\lambda &= \int \chi_E(xy) d\lambda(x) \\ &= \int \chi_{Ey^{-1}}(x) d\lambda(x) \\ &= \lambda(Ey^{-1}) \\ &= \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda \end{aligned}$$

Le résultat est vraie pour les fonctions caractéristiques donc par linéarité, pour les fonctions étagées. Dans le cas $f \in L^1(G)$, le résultat reste vraie en approximant f par une suite croissante de fonctions étagées.
Pour $f \in C_c^+(G)$, $y \mapsto R_y f$ est continue, $y \mapsto \int R_y f d\lambda$ est continue. Donc Δ est continue. □

Définition 6.47
On dit que G est unimodulaire lorsque $\Delta = 1$.

Remarque 6.48
Les groupes abéliens et les groupes discrets sont unimodulaires.

Lemme 6.49
Le seul sous-groupe compact de $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ est $\{1\}$.

Preuve. Soit H un sous-groupe compact de $\mathbf{R}_+^*$.
Si H contient un élément $x > 1$, alors $\forall n \in \mathbf{N}, x^n \in H$ ce qui est absurde car $x^n \to +\infty$.
Si H contient un élément $x < 1$, alors $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{x^n} \in H$ ce qui est absurde pour la même raison.
Donc $H = \{1\}$. □

Proposition 6.50
Si K est un sous-groupe compact de G, alors $\Delta_{|K} = 1$.

Preuve. Soit K un sous-groupe compact de G.
Alors $\Delta(K)$ est un sous-groupe compact de $\mathbf{R}_*^+$ donc $\Delta(K) = \{1\}$. □

Corollaire 6.51
Si G est compact, alors G est unimodulaire.

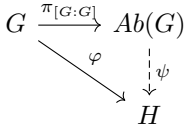
Définition 6.52
On appelle groupe dérivé de G et on note $[G,G]$ le sous-groupe engendré par $\{[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} : x,y \in G\}$.

Proposition 6.53
Le groupe dérivé de G est un sous-groupe distingué de G.

Preuve. Soient $x, y \in G$.
$\forall g \in G, g[x,y]g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gyg^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$
Donc $\forall h \in [G,G], ghg^{-1} \in [G,G]$, $[G,G]$ est un sous-groupe distingué de G. □

Proposition 6.54
Le groupe $G/[G,G]$ est abélien, on l'appelle abélianisé de G et on note $Ab(G) = G/[G:G]$.

Proposition 6.55
Soient G un groupe, H un groupe abélien et $\varphi : G \to H$ un morphisme.
Alors $[G,G] \leq \ker(\varphi)$ et il existe un unique morphisme $\psi : Ab(G) \to H$ tel que $\psi \circ \pi_{[G:G]} = \varphi$.



Preuve. $\forall x, y \in G, \varphi([x,y]) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = [\varphi(x), \varphi(y)] = 1$ car H est abélien.
Soit $\psi : Ab(G) \to H : g[G,G] \mapsto \varphi(g)$ et montrons que ψ est bien défini, c'est à dire, montrons que si $g[G,G] = g'[G,G]$, alors $\psi(g) = \psi(g')$.
Soient $g, g' \in G$ tels que $g[G,G] = g'[G,G]$.
Il existe $g'' \in [G,G]$ tel que $g = g'g''$. Alors $\varphi(g) = \varphi(g')\varphi(g'') = \varphi(g')$ car $g'' \in [G,G] \leq \ker(\varphi)$. Donc ψ est bien défini, montrons qu'il est unique.
On suppose qu'il existe $\psi' : Ab(G) \to H$ un morphisme tel que $\varphi = \psi' \circ \pi_{[G,G]}$.
$\forall g[G,G] \in Ab(G), \psi'(g[G,G]) = \psi(g[G,G])$ donc $\psi = \psi'$. □

Proposition 6.56
Si $Ab(G)$ est compact, alors G est unimodulaire.

Preuve. Il existe un unique morphisme $\psi : Ab(G) \to \mathbf{R}_+^*$ tel que $\psi \circ \pi = \Delta$, mais comme $Ab(G)$ est compact $\psi = 1$. Donc $\Delta = 1$, G est unimodulaire. □

Proposition 6.57
Soit (X,d) un espace métrique séparable localement compact. On suppose que μ, ν sont deux mesures de Borel sur X telles que : $\exists f \in C(X,]0,+\infty[) : \forall \phi \in C_c(X), \int \phi d\nu = \int \phi f d\mu$. Alors pour tout borélien E de X, $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

Preuve. Pour E borélien de X, on pose $\tilde{\nu}(E) = \int_E f d\mu$. $\tilde{\nu}$ et ν sont des mesures de Borel régulières sur X.
Soient U un ouvert de X et $\Phi = \{\phi \in C_c(X) : 0 \leq \phi \leq 1, \mathrm{supp}(\phi) \subset U\}$.
Il existe $(\phi_n)_n$ une suite croissante d'éléments de Φ telle que $\phi_n \to_n \chi_U$ simplement. Alors $\nu(U) = \int \chi_U d\nu = \lim_n \int \phi_n d\nu$ par théorème de convergence monotone. Or $\int \phi_n d\nu = \int f\phi_n d\mu$ mais alors en appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence montone, on obtient : $\nu(U) = \int f\chi_U d\mu = \tilde{\nu}(U)$. Donc $\nu = \tilde{\nu}$. □

Proposition 6.58
Soient λ une mesure de Haar à gauche sur G et ρ la mesure sur G définie par $\rho(E) = \lambda(E^{-1})$.
Alors $d\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$.

Preuve. Soit $f \in C_c(G)$. On pose $g(x) = f(x)\Delta(x^{-1})$.
Par la proposition 6.46 :

$$\begin{aligned}\int R_y f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x) &= \int R_y f(x)\Delta(yy^{-1}x^{-1})d\lambda(x)\\ &= \Delta(y)\int R_y f(x)\Delta((xy)^{-1})d\lambda(x)\\ &= \Delta(y)\int R_y g(x)d\lambda(x)\\ &= \Delta(y)\Delta(y^{-1})\int g(x)d\lambda(x)\\ &= \Delta(yy^{-1})\int f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x)\\ &= \int f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x)\end{aligned}$$

Donc la forme linéaire $f \mapsto \int f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x)$ est invariante à droite, il existe $c > 0$ telle que la mesure de Haar associée soit égale à $c\rho$. Par la proposition précédente : $cd\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$. Si $c \neq 1$, alors on considère un voisinage symétrique compact K de 1 dans G tel que $\forall x \in K, |\Delta(x^{-1}) - 1| \leq \frac{1}{2}|c-1|$. Alors $K = K^{-1}$ donc $\lambda(K) = \rho(K)$ et :
$|c-1|\lambda(U) = |c\rho(U) - \lambda(U)| = |\int(\Delta(x^{-1}) - 1)d\lambda(x)| \leq \frac{1}{2}|c-1|\lambda(U)$: absurde. Donc $c = 1$. □

Le corollaire suivant est utile en pratique pour faire un changement de variable.

Corollaire 6.59
$d\lambda(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$ *et* $d\rho(x^{-1}) = \Delta(x)d\rho(x)$.

Proposition 6.60
i) $\mathbf{R}^n$ *est unimodulaire.*
ii) $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ *est unimodulaire.*

Chapitre 7

Applications

7.1 Espaces homogènes

Définition 7.1
Soient G un groupe topologique compact et K un espace topologique compact séparé.
On dit que G agit transitivement sur K lorsqu'il existe une application continue $(G \times K) \to K : (g, k) \mapsto g(k)$ telle que :
i) $\forall k \in K, e(k) = k$.
ii) $\forall k \in K, \forall g_1, g_2 \in G, (g_1 g_2)(k) = g_1(g_2(k))$.
iii) $\forall k_1, k_2 \in K, \exists g \in G / g(k_1) = k_2$.
Dans ce cas, on dit que K est un espace homogène.

Remarque 7.2
Chaque élément de G définit un homéomorphisme de K dans K.

Proposition 7.3
Soient G un groupe topologique compact et H un sous-groupe fermé de G.
Alors G/H est un espace homogène.

Preuve. G/H est séparé car H est fermé. G est compact et la surjection canonique $\pi_H : G \to G/H$ est continue surjective donc G/H est compact. On considère l'action $G \times G/H \to G/H : (g_1, g_2 H) \to g_1 g_2 H$.
$e(gH) = egH = gH$ et $(g_1 g_2)(gH) = g_1 g_2 gH = g_1(g_2(gH))$. $(g_2 g_1^{-1})(g_1 H) = g_2 g_1^{-1} g_1 H = g_2 H$. □

Définition 7.4
Soit G un groupe compact agissant transitivement sur les compacts K_1, K_2.
On dit que K_1 et K_2 sont isomorphes sous l'action de G lorsqu'il existe $\phi : K_1 \to K_2$ un homéomorphisme tel que $\forall k_1 \in K_1, \phi(g(k_1)) = g(\phi(k_1))$.

Théorème 7.5
Soit G un groupe compact agissant transitivement sur K compact séparé.
Alors il existe un sous-groupe fermé H de G tel que K et G/H soient isomorphes sous l'action de G.

Preuve. Soit $k_0 \in K$.
On considère $H = Stab_G(k_0) = \{g \in G : g(k_0) = k_0\}$ qui est un sous-groupe fermé de G et on pose $\phi : G/H \to K : gH \mapsto g(k_0)$.
Si $g_1 H = g_2 H$, alors $g_1 h_1 = g_2 h_2$ donc $g_1(h_1(k_0)) = g_2(h_2(k_0))$ puis $g_1(k_0) = g_2(k_0)$.
Donc ϕ est bien définie.
Si $g_1(k_0) = g_2(k_0)$, alors $g_1^{-1}(g_2(k_0)) = k_0$ donc $g_1^{-1} g_2 \in H$ soit $g_1 H = g_2 H$. ϕ est injective.
G agit transitivement sur K donc ϕ est surjective. Donc ϕ est une bijection.
Soit $g \in G$ et V un voisinage ouvert de $g(k_0)$.
$(g, k) \to g(k)$ est continue sur $G \times K$ donc il existe un voisinage ouvert U de g tel que $\forall u \in U, u(k_0) \in V$.
Or $\pi_H(U)$ est un voisinage ouvert de gH dans G/H tel que $\pi_H(U) \subset \phi^{-1}(V)$. Donc ϕ est continue bijective définie sur un compact ($G/H = \pi(G)$ avec $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique qui est continue, H est un sous-groupe fermé et G est compact donc G/H est compact), ϕ est un homéomorphisme.
De plus, $g_1(\phi(g_2 H)) = g_1(g_2(k_0)) = (g_1 g_2)(k_0) = \phi(g_1(g_2 H))$ d'ou le résultat. □

Théorème 7.6
Soit G un groupe compact agissant transitivement sur K compact séparé.
Alors il existe une unique mesure de probabilité sur K G-invariante.

Preuve. Par le théorème précédent, on peut remplacer K par G/H.
Soit μ la mesure de Haar sur G telle que $\mu(G) = 1$.
On définit $\mu_{G/H}$ par $\mu_{G/H}(B) = \mu(\pi_H^{-1}(B))$ pour B borélien de G/H. Si $g \in G$ est B est un borélien de G/H, alors $g(\pi_H^{-1}(B)) = \{gx : xH \in B\} = \{gx : gxH \in gB\} = \pi_H^{-1}(B)$. Donc $\mu_{G/H}(gB) = \mu(\pi_H^{-1}(gB)) = \mu(g(\pi_H^{-1}(B))) = \mu(\pi_H^{-1}(B)) = \mu_{G/H}(B)$. D'ou l'existence.
Montrons maintenant l'unicité.
Soient $\phi \in C(G), g \in G$.
On pose $\phi_g : G \to G : x \mapsto \phi(gx)$
Soit μ_H la mesure de Haar normalisé sur H : $\mu_H(H) = 1$.
L'application $G \to C(G) : g \mapsto \phi_g$ est continue sur G qui est compact donc elle est uniformément continue.
On pose $\hat{\phi}(g) = \int_H \phi_g(h) d\mu_H(h)$ pour $g \in G$, $\hat{\phi} \in C(G)$ et $\tilde{\phi} : G/H \to G : gH \mapsto \hat{\phi}(g)$.
Montrons que $\tilde{\phi}$ est bien définie :
Si $g_1 H = g_2 H$, alors $g_1^{-1} g_2 \in H$ et $\tilde{\phi}(g_1) = \int_H \phi_{g_1}(h) d\mu_H(h) = \int_H \phi_{g_1}(g_1^{-1} g_2 h) d\mu_H(h) = \int_H \phi(g_2 h) d\mu_H(h) = \tilde{\phi}(g_2)$ donc $\tilde{\phi}$ est bien définie.
$\forall f \in C(G/H), f = \widetilde{f \circ \pi_H}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f \circ \pi_H}(gH) &= \widehat{f \circ \pi_H}(g) \\
&= \int_H (f \circ \pi_H)_g(h) d\mu_H(h) \\
&= \int_H f \circ \pi_H(gH) d\mu_H(h) \\
&= \int_H f(ghH) d\mu_H(h) \\
&= f(gH) d\mu_H(h) \\
&= f(gH)
\end{aligned}$$

Soit ν mesure de probabilité G-invariante sur G/H.
Pour $\phi \in C(G)$, on pose $\lambda(\phi) = \int_{G/H} \tilde{\phi}(gH) d\nu(gH)$.

$$\begin{aligned}
\lambda(\phi_x) &= \int_{G/H} \tilde{\phi_x}(gH) d\nu(gH) \\
&= \int_{G/H} \hat{\phi_x}(g) d\nu(gH) \\
&= \int_{G/H} \phi(xg) d\nu(gH) \\
&= \int_{G/H} \tilde{\phi}(xgH) d\nu(gH) \\
&= \int_{G/H} \tilde{\phi}(gH) d\nu(gH) \\
&= \lambda(\phi)
\end{aligned}$$

Donc par théorème de Riesz, λ est la mesure de Haar normalisée sur G.
Si ν_1, ν_2 sont deux mesures de probabilités sur G/H G-invariantes, alors : $\forall f \in C(G/H), f = \widetilde{f \circ \pi_H}$ donc :

$$\begin{aligned}
\nu_1(f) &= \int_{G/H} f(gH) d\nu_1(gH) \\
&= \int_{G/H} \widetilde{f \circ \pi_H}(gH) d\nu_1(gH) \\
&= \lambda(f \circ \pi_H) \\
&= \nu_2(f)
\end{aligned}$$

□

On note S^{n-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^n$, $O(n)$ le groupe orthogonal et $SO(n)$ le groupe spécial orthogonal.

Proposition 7.7
$SO(n)$ agit transitivement sur S^{n-1}

Preuve. On prouve le résultat par récurrence.
Pour $n = 2$: le résultat est vrai.
Soit $n \geq 3$ tel que $SO(n)$ agit transitivement sur S^{n-1}. Soit $x \in S^n$.
On note $(e_1, ..., e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. On peut écrire x sous la forme $x = \cos(\theta)e_{n+1} + \sin(\theta)x'$ avec $x' \in S^{n-1}$ (en identifiant $\mathbf{R}^n$ à $Vect\{e_1, ..., e_n\}$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$). Par hypothèse, il existe $u \in SO(n)$ tel que $x' = ue_n$.
On pose alors $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h_\theta = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
$h_\theta e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Donc $kh_\theta e_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{11} & - & u_{1n} & 0 \\ u_{22} & - & u_{2n} & 0 \\ | & & | & | \\ u_{n1} & - & u_{nn} & 0 \\ 0 & - & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1n}\sin(\theta) \\ | \\ u_{nn}\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \sin(\theta)ue_n +$
$\cos(\theta)e_{n+1} = \sin(\theta)x' + \cos(\theta)e_{n+1} = x$. □

Théorème 7.8
Il existe une unique mesure de probabilité sur S^{n-1} invariante par rotations.

Preuve. Il existe une unique mesure de probabilité sur S^{n-1} invariante par $SO(n)$ avec ce qui précède. Or $SO(n)$ est engendré par les rotations donc il existe une unique mesure de probabilité sur S^{n-1} invariante par rotations. □

7.2 Représentations unitaires

Définition 7.9
Soient G un groupe topologique et H un espace de Hilbert. On note $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs continus sur H.
Une représentation de G dans H est un morphisme $\pi : G \to \mathcal{L}(H)$ telle que pour tout $v \in H$, l'application $G \to V : g \mapsto \pi(g)(v)$ est continue.

Définition 7.10
Si π n'admets pas de sous-espace invariant non trivial, alors π est dite irrédutible.

Définition 7.11
1) π est dite unitaire si pour tout $g \in G, \pi(g)$ est un opérateur unitaire : $\pi(g)^*\pi(g) = id$
2) On dit que G admets un système complet de représentations unitaires irréductibles si pour tout $g \in G, g \neq e$, il existe une représentation unitaire irréductible (π, H) sur G telle que $\pi(g) \neq id$
3) La dimension de π est la dimension de l'espace de Hilbert associé.

Exemple 7.12
Soient G un groupe topologique compact et λ la mesure de Haar normalisée sur G.
Les applications $G \to L^2(G) : g \mapsto \pi_L(g), G \to L^2(G) : g \mapsto \pi_R(g)$ avec $\pi_L(g) : L^2(G) \to L^2(G) : f \mapsto L_g f, \pi_R(g) : L^2(G) \to L^2(G) : f \mapsto R_g f$.

Grâce à la mesure de Haar, on a obtenu une représentation unitaire ($\forall g \in G, \forall f \in L^2(G), \|\pi(g)f\|_2 = \|f\|_2$) non triviale et on peut montrer qu'on en a en fait obtenu "beaucoup" comme le montre le théorème suivant (sans preuve) :

Théorème 7.13 (Gelfand-Raikov)
Si G est un groupe localement compact, alors les représentations unitaires irréductibles de G séparent les points de G.

Bibliographie

[1] Analyse - Théorie de l'intégration, Marc Briane ; Gilles Pagès, De Boeck Supérieur, 2023

[2] The Joys of Haar Measure, Joe Diestel ; Angela Spalsbury, American Mathematical Society, 2013

[3] Topologie générale et espaces normés (seconde édition), Nawfal El Hage Hassan, Dunod, 2021

[4] Analyse sur les groupes de Lie, Jacques Faraut, Calvage et Mounet, 2018

[5] A course in abstract harmonic analysis (second edition), Geral B. Folland, Chapman and Hall/CRC, 2015

[6] Invariant descriptive set theory, Su Gao, Chapman and Hall/CRC, 2008

[7] Cours d'analyse fonctionnelle - avec 200 exercices corrigés - 2e édition, Daniel Li, Ellipses, 2024

[8] A Course in p-adic Analysis, Alain M. Robert, Springer, 2000

Ceci est la liste des ouvrages utilisés mais je me suis aussi appuyé sur des notes de cours de Julien Melleray.