Géométrie Elémentaire

Serge Parmentier

Automne 2008

CHAPITRE II

1- Rappel sur les formes bilinéaires

Dans ce chapitre, on désigne par V un espace vectoriel réel de dimension finie n et par

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

une forme bilinéaire (1), symétrique (2), non-dégénérée (3):

(1)$\forall u, u', v, v' \in V, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$B(u + \alpha u', v) = B(u, v) + \alpha B(u', v) \quad B(u, v + \beta v') = B(u, v) + \beta B(u, v')$$

(2) $\forall u, v \in V, B(u, v) = B(v, u)$

(3) $\forall u \in V, B(u, v) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow u = 0$

Remarque: Soit $V^* = \{l : V \to \mathbf{R},\ l \text{ linéaire } \}$ l'espace dual de V et

$$\mathcal{B} : V \to V^* : u \mapsto \mathcal{B}(u)$$

l'application linéaire définie par $\mathcal{B}(u)(v) = B(u, v)$. La condition (3) équivaut à $\mathcal{B}$ est injective.

Si $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de V on désigne par $[B]$ la matrice carrée de taille n dont la composante ij vaut $B(b_i, b_j)$.

Voici un *grand classique*

Théorème Il existe une base de V et un entier $p \in \mathbf{N}$, tels que la matrice $[B]$ soit donnée par

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}, \quad p + q = n,$$

où 1_p est la matrice identité de taille p.
L'entier p dépend seulement de B.
Le couple (p, q) est appelé la *signature* de B.

Démo: La preuve qui suit est elle aussi *très classique*.

ι) Existence de la base: On procède par récurrence sur la dimension n.

C'est vrai pour $n = 1$. Montrons *vrai pour* $n \Rightarrow$ *vrai pour* $n+1$:

Etape 1. Il existe un élément $a_1 \in V$ tel que $B(a_1, a_1) \neq 0$. En effet, si $B(u,u) = 0$ pour tout $u \in V$, l'identité de polarisation $4B(u,v) = B(u+v, u+v) - B(u-v, u-v)$ montre que $B(u,v) = 0$ pour tout $u, v \in V$ ce qui contredit la propriété (3).

Etape 2. On considère le sous-espace

$$< a_1 >^{\perp} = \{x \in V \mid B(x, a_1) = 0\}$$

On a

$$V = < a_1 > \oplus < a_1 >^{\perp} \qquad (\star)$$

En effet, si $x = \lambda a_1 \in < a_1 > \cap < a_1 >^{\perp}$, alors $0 = B(x, a_1) = \lambda B(a_1, a_1)$ d'où $\lambda = 0$. D'autre part quelque soit $u \in V$ on a

$$u = \frac{B(x, a_1)}{B(a_1, a_1)} a_1 + (x - \frac{B(x, a_1)}{B(a_1, a_1)} a_1)$$

et le second terme appartient à $< a_1 >^{\perp}$.

Etape 3. Observer que la restriction de B au sous-espace $< a_1 >^{\perp}$ satisfait (1), (2), (3). Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une base $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de V adaptée à la somme directe $(\star)$ dans laquelle

$$[B] = \begin{pmatrix} B(a_1, a_1) & O_{n-1} \\ {}^tO_{n-1} & \begin{pmatrix} 1_{\overline{p}} & 0 \\ 0 & -1_{\overline{q}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $\overline{p} + \overline{q} = n - 1$ et O_{n-1} est une ligne de 0. Pour conclure, il suffit de diviser a_1 par $\sqrt{\pm B(a_1, a_1)}$ selon le signe de $B(a_1, a_1)$: si $B(a_1, a_1) > 0$, la matrice de B dans la base $(\frac{a_1}{\sqrt{B(a_1,a_1)}}, a_2, \ldots, a_n)$ est $I_{\overline{p}+1\,\overline{q}}$

si $B(a_1, a_1) < 0$, la matrice de B dans la base $(a_2, \ldots, a_{\overline{p}+1}, \frac{a_1}{\sqrt{-B(a_1,a_1)}}, a_{\overline{p}+2}, \ldots, a_n)$ est $I_{\overline{p}\,\overline{q}+1}$.

ii) Unicité de l'entier p: Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base où $[B] = I_{pq}$ et $(a'_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base où $[B] = I_{p'q'}$.

Si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i a_i \in < a_1, \ldots, a_p >$, $B(x,x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geq 0$ et $B(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Si $x = \sum_{i=p'+1}^{n} x_i a'_i \in < a'_{p'+1}, \ldots, a'_n >$, $B(x,x) = -\sum_{i=p'+1}^{n} x_i^2 \leq 0$ et $B(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dès lors $< a_1, \ldots, a_p > \cap < a'_{p'+1}, \ldots, a'_n > = \{0\}$. On a donc

$$< a_1, \ldots, a_p > \oplus < a'_{p'+1}, \ldots a'_n > \subset V$$

et en comptant les dimensions,

$$p + (n - p') \leq dim\, V = n,$$

i.e. $p \leq p'$. En échangeant le rôle des bases, on a aussi $p' \leq p$.

Terminologie: Si B est de signature (p,q), toute base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de V dans laquelle la matrice $[B] = I_{pq}$ sera dite $B-$ *adaptée*. Dans une telle base on a

$$B(x,y) = B(\sum_i x_i a_i, \sum_j y_j a_j) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i.$$

Vecteurs isotropes

L'ensemble des éléments $v \in V$ tels que $B(v,v) = 0$ est appelé le cône isotrope de la forme B.

Exemple On a célébré en 2005 le centenaire de la parution de l'article d'A. Einstein sur la relativité restreinte. Dans cette théorie, intervient la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^4$

$$B((x,y,z,t),(x',y',z',t')) = xx' + yy' + zz' - tt'$$

de signature $(3,1)$. En guise d'exemple analogue, considérons sur $\mathbf{R}^2$ la forme bilinéaire

$$B((x,t),(x',t')) = xx' - tt'$$

de signature $(1,1)$. En terminologie physicienne, x est appelé coordonnée d'espace et t coordonnée de temps. La droite $x = vt$ représente la trajectoire d'une particule en mouvement uniforme à vitesse v avec $\mid v \mid \leq 1$ (où par convention la vitesse de la lumière dans le vide est de valeur absolue 1). Le cône isotrope de B est l'ensemble des (x,t) tels que $x^2 - t^2 = (x-t)(x+t) = 0$. C'est donc la réunion des trajectoires $x = \pm t$ à vitesse ± 1. C'est pourquoi le cône isotrope est appelé *cône de lumière*. Les trajectoires de particules matérielles sont localisées dans les régions $\mid x \mid < \mid t \mid$ appelées *futur* et *passé*. Les régions inacessibles aux trajectoires de particules $\mid x \mid > \mid t \mid$ sont appelées *l' ailleurs*.

Groupe des endomorphismes de V qui préservent B.

Proposition : L'ensemble $O_B(V)$ des applications linéaires $f : V \to V$ telles que $B(f(u), f(v)) = B(u,v)$, $\forall u, v \in V$ est un sous-groupe de $Gl(V)$.

Démo: Si $f \in O_B(V)$ et $u \in Kerf$ alors $f(u) = 0 \Rightarrow 0 = B(f(u), f(v)) = B(u, v)$, $\forall v \in V \Rightarrow u = 0$ par la propriété (3). Donc f est injective et dès lors bijective.

Clairement, $Id_V \in O_B(V)$ et $f, g \in O_B(V) \Rightarrow f \circ g \in O_B(V)$.
Enfin $B(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = B(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v)) = B(u, v)$.

Proposition Le groupe $O_B(V)$ agit de façon transitive et simple sur l'ensemble $\mathbf{B}$ des bases $B-$ adaptées.

Démo: Soit $\alpha = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base $B-$ adaptée et $f \in O_B(V)$. On a $B(f(a_i), f(a_j)) = B(a_i, a_j)$, dès lors la base $f(\alpha) = (f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ est aussi $B-$ adaptée. L'application

$$\phi : O_B(V) \times \mathbf{B} \to \mathbf{B} : \alpha \mapsto f(\alpha)$$

définit clairement une action.
Pour vérifier que ϕ est transitive et simple, il suffit d'observer que pour toute paire de bases $\alpha, \alpha' \in \mathbf{B}$, l'unique bijection linéaire $f \in Gl(V)$ telle que $f(\alpha) = \alpha'$ appartient à $O_B(V)$: en effet, pour $u = \sum_i x_i a_i, v = \sum_j y_j a_j$ on a

$$B(f(u), f(v)) = \sum_{i,j} x_i y_j B(f(a_i), f(a_j)) = \sum_{i,j} x_i y_j B(a_i, a_j) = B(u, v).$$

$B-$ adjoint d'un endomorphisme A tout endomorphisme $f : V \to V$ on peut associer un endomorphisme dual

$$f^* : V^* \to V^* : \alpha \mapsto f^*(\alpha)$$

en posant $f^*(\alpha)(u) = \alpha(f(u))$, $\forall u \in V$. (V^* désigne le dual linéaire de V.)
Soit

$$\mathcal{B} : V \to V^* : u \mapsto \mathcal{B}(u)$$

la bijection linéaire définie par $\mathcal{B}(u)(v) = B(u, v), \forall v \in V$.
L'endomorphisme

$$f^\star : V \longrightarrow V : u \mapsto \mathcal{B}^{-1} \circ f^* \circ \mathcal{B}$$

est appelé le $B-$ adjoint de f.
La relation $\mathcal{B} \circ f^\star = f^* \circ \mathcal{B}$ s'écrit

$$B(f(u), v) = B(u, f^\star(v)), \quad \forall u, v \in V$$

On a les propriétés: $Id_V^\star = Id_V$, $(f + g)^\star = f^\star + g^\star$, $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.

Un endomorphisme f de V est dit $B-$*symétrique ou auto-adjoint* si $f^\star = f$. Il est dit $B-$*antisymétrique* si $f^\star = -f$.

$O_B(V)$ en terme de l'adjoint

Les 3 propriétés suivantes
ι) $f \in O_B(V)$ $\quad \iota\iota$) $f^\star \circ f = Id_V$ $\quad \iota\iota\iota$) $f \circ f^\star = Id_V$ sont équivalentes.

Démo: $\iota) \Leftrightarrow \iota\iota)$:

$$\begin{aligned} f \in O_B(V) &\Leftrightarrow \forall u, v, B(fu, fv) = B(u,v) \\ &\Leftrightarrow \forall u, v,\ B(u, (f^\star \circ f)v) = B(u,v) \\ &\Leftrightarrow \forall u, v,\ B(u, (f^\star \circ f - Id_V)v) = 0 \\ &\Leftrightarrow f^\star \circ f = Id_V. \end{aligned}$$

$\iota\iota) \Rightarrow \iota\iota\iota)$:
$f^\star \circ f = Id_V \Rightarrow f$ est bijectif $\Rightarrow f^\star = f^{-1} \Rightarrow f \circ f^\star = Id_V$. Pour la réciproque permuter les rôles de f et $f^\star$.

Ecriture dans une base:
Soit $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de V, $[B]$ la matrice dont la composante ij vaut $B(b_i, b_j)$, $[f]$ et $[f^\star]$ les matrices de f et $f^\star$ dans cette base. On a

$$[f^\star] = [B]^{-1}\,{}^t[f]\,[B]$$

En particulier, si $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base $B-$ adaptée (i.e. $[B] = I_{pq} = [B]^{-1}$) on a

$$\begin{aligned} &f \in O_B(V) \Leftrightarrow I_{pq}\ {}^t[f]\, I_{pq}\, [f] = 1_n \\ &f = \pm f^\star \Leftrightarrow [f] = \pm I_{pq}\ {}^t[f]\, I_{pq}. \end{aligned}$$

Quelques conséquences importantes:
Soit $f \in O_B(V)$, $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base $B-$ adaptée de V et $[f]$ la matrice de f dans cette base.
On a $1 = Det(I_{pq}\ {}^t[f]\, I_{pq}\, [f]) = (Det[f])^2$ dès lors

$$\begin{aligned} &O_B(V) = O_B(V)^+ \cup O_B(V)^- \\ &O_B(V)^\pm = \{f \in O_B(V) \mid Det(f) = \pm 1\} \end{aligned}$$

Remarquer que $O_B(V)^+ \subset O_B(V)$ est un sous-groupe distingué; par contre $O_B(V)^- \subset O_B(V)$ *n'est pas* un sous-groupe. (Pourquoi?)

Soit $O(p,q)$ le sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{R})$ défini par

$$O(p,q) = \{A \in M_n\mathbf{R} \mid I_{pq}\ {}^tA\, I_{pq}\, A = 1_n\}.$$

L'écriture dans une base $B-$ adaptée montre que l'application

$$End(V) \to M_n\mathbf{R} : f \mapsto [f]$$

établit une bijection entre $O_B(V)$ et $O(p,q)$.

Quadriques associées

Soit

$$q : V \to \mathbf{R} : v \mapsto B(v,v)$$

la forme quadratique associée à B. Pour un réel $r \in \mathbf{R}$ l'ensemble

$$Q_r = \{v \in V \mid q(v) = r\}$$

est appelé une quadrique. Quelque soit $f \in O_B(V)$ on a $f(Q_r) \subset Q_r$.

exemples en dimension 3: (1) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Q_1 est la sphère unité.
(2) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Q_1 est un cylindre hyperbolique, Q_0 est un cône (le cône isotrope en signature (2,1)), Q_{-1} est un hyperboloide à deux nappes.

Intermède de géométrie hyperbolique: On considère l'hyperboloide Q_{-1} de l'exemple (2). Soit

$$Q_{-1} = Q^+ \cup Q^-$$
$$Q^\pm := \{(x,y,z) \in Q_{-1}, \mid \pm z > 0\}$$

sa décomposition en nappes supérieure et inférieure.
Soient $n = (0,0,1) \in Q^+$ et $s = (0,0,-1) \in Q^-$ les 'pôles' nord et sud et soit P le plan 'équatorial' d'équation $z = 0$.
Pour un point $m = (x,y,z) \in Q^+$, l'unique point d'intersection de la droite (sm) et du plan P est appelé la *projection stéréographique* de m sur P. Cette projection est notée $p(m)$.
Il est aisé de voir à l'aide d'une représentation paramétrique de la droite (sm) que

$$p(x,y,z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0).$$

De plus, $\| p(x,y,z) \|^2 = \frac{(z-1)}{(z+1)} \leq 1$ et $lim_{z\to\infty} \frac{z-1}{z+1} = 1$ montrent que p est à valeur dans le disque unité ouvert $D = \{(a,b,0) \mid a^2 + b^2 < 1\} \subset P$.

Propriété: La projection stéréographique

$$p : Q^+ \longrightarrow D : m \mapsto p(m)$$

est une bijection (en fait un homéomorphisme).

Démo: Il suffit de donner
$$p^{-1} : D \to Q^+.$$

Mais $p^{-1}(a, b, 0)$ est l'unique point d'intersection de la droite passant par les points s, $(a, b, 0)$ et la nappe Q^+. Un calcul donne

$$p^{-1}(a, b, 0) = \frac{1}{1 - (a^2 + b^2)}(2a,\ 2b,\ 1 + (a^2 + b^2)).$$

Avant de poursuivre, une définition *(pour des rappels euclidiens voir le paragraphe suivant)*:

Cercles orthogonaux du plan: Deux cercles C et C' du plan euclidien sont dits orthogonaux si $C \cap C' \neq \emptyset$ et si aux points d'intersection les tangentes aux deux cercles sont orthogonales.

Des cercles orthogonaux du plan équatorial P apparaissent naturellement en considérant l'image par la projection stéréographique p de certaines courbes coniques tracées sur Q^+. Voici comment faire:

Soit P' un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. On suppose que

$$P' \cap Q^+ \neq \emptyset.$$

Cette intersection est le lieu des points $m = (x, y, z)$ qui satisfont le système d'équations

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= -1 \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

Propriété:

L'image de $P' \cap Q^+$ par la projection stérégraphique p est

- un diamètre du disque unité du plan équatorial P lorsque $c = 0$

- un arc de cercle orthogonal au bord du disque unité de P lorsque $c \neq 0$.

(La démo revient à un calcul qui sera fait en TD.)

Ce sont précisément ces diamètres et ces arcs de cercles qui jouent le rôle de *droites* en géométrie hyperbolique du disque unité D. Ils sont utilisés par l'artiste néerlandais Escher dans ses représentations (quelque peu fantastiques) de pavages du disque.

2 - Rappel sur les Espaces euclidiens

Cette section rassemble les définitions et constructions *de base* de la géométrie vectorielle euclidienne.

Produit scalaire

Un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel V est une forme

$$V \times V \longrightarrow \mathbf{R} : (u, v) \mapsto (u \mid v)$$

bilinéaire (1), symétrique (2), définie positive (3'):
$\forall x \in V, (x \mid x) \geq 0$ et $(x \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Un produit scalaire est donc une forme vérifiant les conditions (1), (2), (3) de la section 1 de signature $(p = n, 0)$.

Espace vectoriel euclidien

Tout espace vectoriel réel V de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ est appelé un espace euclidien.

Tout espace euclidien de dimension n est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire

$$\big((x_1, \cdots, x_n) \mid (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(Trouvez un isomorphisme!)

Norme

Une norme sur V est une application $V \to \mathbf{R} : v \mapsto \| v \|$ vérifiant
(N1) $\forall u \in V, \| u \| \geq 0$ et $\| u \| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
(N2) $\forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \| \lambda u \| = | \lambda | \| u \|$.
(N3) $\forall u, u' \in V, \| u + u' \| \leq \| u \| + \| u' \|$.

Proposition Si $(V, (\,|\,))$ est euclidien, l'application

$$V \to \mathbf{R} : v \mapsto \| v \| = \sqrt{(v \mid v)}$$

est une norme.

Démo: (N1) et (N2) sont évidentes. Pour vérifier (N3), observer qu'elle est équivalente à l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$(u, u') \leq \| u \| \| u' \|$$

qui se démontre comme suit: Si $u = 0$, c'est clair. Si $u \neq 0$, l'expression

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \| \lambda u + u' \|^2 \\ &= \lambda^2 \| u \|^2 + 2\lambda(u \mid u') + \| u' \|^2 \end{aligned}$$

est un polynôme de degré 2 en la variable réelle λ qui est positif. Il a donc au plus une racine réelle, i.e. son discriminant $4(u \mid u')^2 - 4 \| u \|^2 \| u' \|^2 \leq 0$.

Distance
Une distance sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbf{R}$ telle que
(D1) $\forall x, x' \in X,\ d(x, x') = d(x', x)$
(D2) $\forall x, x' \in X,\ d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$
(D3) $\forall x, x', x'' \in X,\ d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$

Proposition Toute norme $\| \ \|$ sur V induit la distance

$$d_V : V \times V \to \mathbf{R} : (u, v) \mapsto \| u - v \|$$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On dit que deux vecteurs $u, v \in V$ sont orthogonaux si $(u \mid v) = 0$.

Le théorème de la section 1 appliqué au cas de signature $(n, 0)$ assure l'existence d'une base $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V telle que

$$(a_i \mid a_j) = \delta_{ij}$$

Une telle base est dite orthonormée.

D'autre part le caractère défini positif du produit scalaire montre que le cône isotrope est réduit à $\{0\}$, ce qui permet une construction itérative (le procédé de Gram-Schmit) d'une base orthormée à partir de toute base de V:

Proposition Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V. Il existe une base orthonormée $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V telle que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ les sous-espaces vectoriels $< b_1, b_2, \ldots, b_j >$ et $< a_1, a_2, \ldots, a_j >$ coincident.

Démo: Poser $a'_1 = b_1$. Supposer $a'_2, \ldots, a'_j$ construits avec $(a'_k \mid a'_l) = 0$ pour $k \neq l$ et $< b_1, \ldots, b_j > = < a'_1, \ldots, a'_j >$.
Chercher a'_{j+1} sous la forme

$$a'_{j+1} = b_{j+1} + \lambda_1 a'_1 + \cdots + \lambda_j a'_j$$

Les conditions d'orthogonalité $(a'_{j+1} \mid a'_k) = 0$ pour $k \in \{1, \ldots, j\}$ donnent

$$\lambda_k = -\frac{(b_{j+1} \mid a'_k)}{(a'_k \mid a'_k)}, \quad 1 \leq k \leq j$$

Il reste à normer la base ainsi construite en posant $a_i = \frac{a'_i}{\sqrt{(a'_i \mid a'_i)}}$, $1 \leq i \leq n$.

Groupe Orthogonal, isométries linéaires

Le groupe orthogonal $O(V)$ est le groupe des endomorphismes de V qui préservent le produit scalaire:

$$O(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ linéaire et } (f(u) \mid f(v)) = (u \mid v),\ \forall u, v \in V\}.$$

Il s'agit donc du groupe $O_B(V)$ de la section 1 pour B de signature $(n, 0)$.
Le groupe $O(n,0) = \{A \in M_n\mathbf{R} \mid {}^tAA = 1_n\}$ de la section 1 est simplement noté O_n. Par la section 1, l'application $O(V) \to O_n : f \mapsto [f]$ qui à $f \in O(V)$ associe sa matrice $[f]$ dans une base orthonormée est une bijection.

Remarque: Si λ est une valeur propre réelle d'un endomorphisme orthogonal $f \in O(V)$ alors $\lambda \in \{+1, -1\}$. En effet: Pour $u \in V \setminus \{0\}$ tel que $f(u) = \lambda u$ on a $(u \mid u) = (f(u) \mid f(u)) = (\lambda u \mid \lambda u) = \lambda^2(u \mid u)$. Puisque $(u \mid u) \neq 0$ il vient $\lambda^2 = 1$.

Une application linéaire $f : V \to V$ est une isométrie si elle préserve la distance d_V:

$$\forall u, v \in V,\ d_V(f(u), f(v)) = d_V(u, v)$$

L'ensemble $Isom(V)$ des isométries linéaires est un sous-groupe de $Gl(V)$.
On vérifie aisément à l'aide de l'identité de polarisation

$$4(u \mid v) = (u + v \mid u + v) - (u - v \mid u - v)$$

que

$$Isom(V) = O(V).$$

3 - Symétries orthogonales, engendrement de $O(V)$ par les réflexions

Soit $(V, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n.

Deux sous-espaces vectoriels $W, W' \subset V$ sont dits orthogonaux (on écrit $W \perp W'$) si $(w \mid w') = 0$, $\forall w \in W, w' \in W'$.

Somme directe orthogonale: Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. L'ensemble

$$W^\perp = \{u \in V \mid (u \mid w) = 0,\ \forall w \in W\}$$

est un sous-espace vectoriel de V et

$$V = W \oplus W^\perp$$

Démo: Soit $(b_i)_{1 \le i \le n}$ une base de V telle que $(b_i)_{1 \le i \le dim\, W}$ soit une base de W et soit $(a_i)_{1 \le i \le n}$ la base orthonormée obtenue en appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(b_i)_{1 \le i \le n}$. On a

$$W = < b_1, \dots, b_{dim\, W} > = < a_1, \dots, a_{dim\, W} >$$
$$V = W \oplus < a_{dim\, W+1}, \dots, a_n >$$

Pour conclure il suffit d'observer que cette décomposition en somme directe est celle de l'énoncé. En effet,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in W^{\perp} \Leftrightarrow (u \mid a_k) = 0, \forall k \in \{1, \ldots, dim\, W\}$$
$$\Leftrightarrow x_k = 0, \forall k \in \{1, \ldots, dim\, W\}$$
$$\Leftrightarrow u \in < a_{dim\, W+1}, \ldots, a_n >$$

Exercice: Si $W, W' \subset V$ sont deux sous-espaces vectoriels, on a $(W + W')^{\perp} = W^{\perp} \cap W'^{\perp}$.

Symétries orthogonales

Soit $s : V \to V$ une symétrie vectorielle (s est linéaire et $s \circ s = Id_V$) et soit

$$V = V_+^s \oplus V_-^s$$

la décomposition de V en sous-espaces propres $V_{\pm}^s = \{v \in V \mid s(v) = \pm v\}$.

Lemme $s \in O(V) \Leftrightarrow V_+^{s\perp} = V_-^s$

Démo: Dans un sens, $s \in O(V) \Leftrightarrow (s(u) \mid s(v)) = (u, v), \forall u, v \in V \Rightarrow -(u_+ \mid, u_-) = (s(u_+) \mid s(u_-)) = (u_+ \mid u_-), \forall u_{\pm} \in V_{\pm}^s \Rightarrow V_-^s \subset V_+^{s\perp}$ d'où l'égalité car ils sont de même dimension.

Dans l'autre sens, écrire $u = u_+ + u_-$ et $v = v_+ + v_-$ avec $u_{\pm}, v_{\pm} \in V_{\pm}^s$. On a $(s(u) \mid s(v)) = (u_+ - u_- \mid v_+ - v_-) = (u_+ \mid v_+) + (u_- \mid v_-) = (u_+ + u_- \mid v_+ + v_-) = (u \mid v)$.

Réflexions Une réflexion est une symétrie orthogonale $s \in O(V)$ pour laquelle $dim\, V_+^s = n - 1$.

Remarque: le déterminant d'une symétrie s vaut $(-1)^{dim\, V_-^s}$.
Le déterminant d'une réflexion vaut donc -1.

Lemme Soient $f \in O(V)$. Pour tout sous-espace $W \subset V$, $f(W) \subset W \Rightarrow f(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$.

Démo: $f \in O(V) \Rightarrow f$ est bijective $\Rightarrow f(W) = W$. Soient $w \in W, w' \in W^{\perp}$ et $u \in W$ tel que $w = f(u)$. On a $0 = (u \mid w') = (f(u) \mid f(w')) = (w \mid f(w'))$, i.e. $f(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$.

Théorème (Les réflexions engendrent le groupe orthogonal)
Si $f \in O(V)$ il existe $p (\leq n)$ réflexions $s_1, \ldots, s_p \in O(V)$ telles que $f = s_1 \circ \ldots \circ s_p$.

Démo: On procède par récurrence sur $dim\, V = n$. Si $n = 1$ alors $V \simeq \mathbf{R}$ muni du produit scalaire $(x \mid x') = xx'$. Un endo $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto ax$ est orthogonal ssi $a \in \{+1, -1\}$, i.e. $O(\mathbf{R}) = \{Id, -Id\}$. L'identité est composée de 0 réflexion et $-Id$ est une réflexion.

On suppose la propriété vraie pour tout espace euclidien V de dimension $\leq n - 1$. Soit alors $f \in O(V) \setminus \{Id_V\}$ et $dim\, V = n$.

Etape 1: Puisque $f \neq Id_V$, il existe $v \in V$ tel que $f(v) \neq v$. Considérons la décomposition

$$V = < v - f(v) > \oplus < v - f(v) >^{\perp}$$

et la réflexion s telle que $V_+^s = < v - f(v) >^\perp$ et dès lors $V_-^s = < v - f(v) >$. Observer que $s(v) = f(v)$ et dès lors

$$v = s^{-1} \circ f(v) = s \circ f(v) \quad (\text{ puisque } s^{-1} = s).$$

Etape 2: Soit

$$V = < v > \oplus < v >^\perp$$

La transformation orthogonale $s \circ f$ fixe v et donc , par le lemme, elle stabilise son supplémentaire orthogonal, i.e.

$$s \circ f(< v >^\perp) \subset < v >^\perp .$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction $(s \circ f)_{|_{<v>^\perp}} \in O(< v >^\perp)$. En clair, on peut trouver k réflexions $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in O(< v >^\perp)$ avec $k \leq n - 1$ telles que

$$(s \circ f)_{|_{<v>^\perp}} = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k.$$

Etape 3: Pour conclure on va relever les réflexions σ_i en des réflexions $s_i \in O(V)$. Il suffit de définir s_i sur les facteurs de la somme directe $V = < v > \oplus < v >^\perp$ comme suit:

$$s_i(v) = v \text{ et } s_i(w) = \sigma_i(w), \forall w \in < v >^\perp$$

On a $s_i \circ s_i = Id_V$ car $\sigma_i \circ \sigma_i = Id_{<v>^\perp}$.
D'autre part $V_+^{s_i} = < v > \oplus (< v >^\perp)_+^{\sigma_i}$ est un hyperplan et $V_-^{s_i} = (< v >^\perp)_-^{\sigma_i}$. Ces sous-espaces sont orthogonaux, dès lors $s_i \in O(V)$. Enfin observer que $s \circ f = s_1 \circ \ldots \circ s_k$ dès lors

$$f = s \circ s_1 \circ \ldots \circ s_k.$$

C'est l'énoncé à la numérotation près.

4 - Formes normales matricielles

Pour rappel (cf section 1) $O^\pm(V) = \{f \in O(V) \mid Det(f) = \pm 1\}$.

Le cas du plan euclidien

Soit $(V, (\,|\,))$ un espace euclidien de dimension 2.
La matrice de $f \in O(V)$ dans toute base orthonormée de V s'écrit
si $f \in O^+(V)$:

$$[f] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

si $f \in O^-(V)$:

$$[f] = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

pour des réels a, b tels que $a^2 + b^2 = 1$.

Démo: Soit (a_1, a_2) une base orthonormée.
Ecrivons $f(a_1) = a\,a_1 + b\,a_2$ et $f(a_2) = a'\,a_1 + b'\,a_2$. Les conditions $(f(a_i) \mid f(a_j)) = \delta_{ij}$ s'écrivent $a^2 + b^2 = 1 = a'^2 + b'^2$ et $aa' + bb' = 0$. Ces équations admettent deux solutions $(a' = -b,\ b' = a)$ et $(a' = b,\ b' = -a)$. Dans le premier cas $Det(f) = +1$ et dans le second $Det(f) = -1$.

Pour $f \in O^+(V)$ en choisissant $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $a = cos(\theta)$ et $b = sin(\theta)$, il vient

$$[f] = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice d'une rotation d'angle θ. (Pour une étude plus précise de la notion d'angle voir *infra.*)
Pour $f \in O^-(V)$, $f \circ f = Id_V$ et le polynôme caractéristique de f est $x^2 - 1$. Dès lors

$$V = V_+^f \oplus V_-^f$$

et f est une réflexion de droite fixe V_+^f. Dans toute base $(b_+, b_-) \in V_+^f \times V_-^f$ on a

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On retiendra: *Si $dim(V) = 2$, $f \in O(V)$ est une rotation ssi $Det(f) = 1$ et f est une réflexion ssi $Det(f) = -1$.*

L'assertion suivante est laissée au lecteur:

Tout endomorphisme symétrique f du plan euclidien est de spectre réel et diagonalisable dans une base orthonormée.

Le cas de dimension $n \geq 2$

Lemme: Soit V un espace vectoriel réel et $f : V \to V$ un endomorphisme. Il existe un sous-espace $W \subset V$ de dimension au plus 2 tel que $f(W) \subset W$.
Démo: Le polynôme caractéristique $\chi_f(X) \in \mathbf{R}[X]$, dès lors ses racines sont soit réelles, soit viennent par paire de racines complexes conjuguées. Il y a deux cas
(1) χ_f a une racine réelle λ. Poser alors $W = < v_\lambda >$ où $f(v_\lambda) = \lambda\, v_\lambda$.
(2) χ_f n'a pas de racine réelle. Soit alors

$$\chi_f(X) = p_1(X) \dots p_r(X), \qquad n = 2r$$

la décomposition de χ_f en polynômes irréductibles de degré 2 : $p_i(X) = (X - \lambda_i)(X - \overline{\lambda}_i)$.
Par Cayley-Hamilton,

$$\chi_f(f) = p_1(f) \circ p_2(f) \circ \dots \circ p_r(f) = 0.$$

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ l'endomorphisme $p_i(f)$ était injectif alors $\chi_f(f)$ aussi, en particulier il ne serait pas nul. Il doit donc exister un polynôme p_i tel que $p_i(f)$ ne soit pas injectif. Soit alors $v \in V$ non nul tel que $p_i(f)(v) = 0$. En développant on a

$$f^2(v) - (\lambda_i + \overline{\lambda}_i)f(v) + \mid \lambda_i \mid^2 v = 0$$

et le sous-espace

$$W = < v, f(v) >$$

est un sous-espace $f-$ stable de dimension 2.

Proposition Si f est un endomorphisme symétrique ou orthogonal d'un espace euclidien V, il existe une décomposition

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$$

en sous-espaces $f-$ stables de dimension au plus 2 deux à deux orthogonaux i.e. tels que $i \neq j \Rightarrow W_i \perp W_j$.

Démo: Par récurrence sur $dim(V) = n$. Pour $n = 1$ c'est trivial. Montrons vrai pour $n \Rightarrow$ vrai pour $n+1$. Soit $W \subset V$ un sous-espace $f-$ stable de dimension au plus 2 comme dans le lemme. On sait que si $f \in O(V)$ alors $f(W) \subset W \Rightarrow f(W^\perp) \subset W^\perp$; il est facile de voir qu'il en est de même si f est symétrique. On a donc une décomposition en somme directe $V = W \oplus W^\perp$ de sous-espace orthogonaux $f-$ stables. Pour conclure il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction $f_{|_{W^\perp}}$.

Corollaire (forme normale matricielle)

(1) Si f est symétrique, f est à spectre réel et il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de f.

(2) Si $f \in O(V)$ il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$[f] = \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où $p_+ + p_- + 2r = dim(V) = n$ et $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

Ceci résulte du cas $n = 2$ et de la proposition qui précède.

Forme du corollaire pour une matrice: La matrice P de passage d'une base orthonormée $\mathcal{A}$ à une autre base orthonormée $\mathcal{A}'$ de V appartient à O_n. En effet: Soit h l'endomorphisme de V dont la matrice $[h]$ dans la base $\mathcal{A}$ vaut P. h transforme la base $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{A}'$ et donc $h \in O(V)$ et dès lors sa matrice $[h] \in O_n$.

On peut réexprimer le corollaire en termes matriciels comme suit: $\forall M \in O_n$, il existe $P \in O_n$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix} {}^tP.$$

(Pour rappel $P \in O_n \Leftrightarrow^t P = P^{-1}$.)

Description en dimension 3

On convient de ne pas écrire les 0 dans les matrices.
(1) $f \in O^+(V) \setminus \{Id_V\}$. On a $1 = Det(f) = (-1)^{p_-}$ dès lors $p_- = 0$ ou $p_- = 2$.
Si $p_- = 0$, $[f] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\theta) \end{pmatrix}$.
Si $p_- = 2$, $[f] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\pi) \end{pmatrix}$.
Il s'agit donc d'une rotation autour d'un axe dans un plan orthogonal à cet axe.
(2) $f \in O^-(V)$. On a $-1 = Det(f) = (-1)^{p_-} \Rightarrow p_- = 1$ ou $p_- = 3$.
Si $p_- = 1$, $[f] = \begin{pmatrix} -1 & \\ & R(\theta) \end{pmatrix}$ avec éventuellement $\theta \equiv 0[2\pi]$.
Si $p_- = 3$, $[f] = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & R(\pi) \end{pmatrix}$.
Il s'agit de la composée d'une réflexion s de matrice $[s] = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1_2 \end{pmatrix}$ et d'une rotation d'axe V_-^s dans le plan fixe de la réflexion.

5 - Questions de connexité par arcs

Soit $(V, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et $d_V : V \times V \to \mathbf{R}$ la distance induite par le produit scalaire (cf section 2).
Pour rappel une application $f : V \to V'$ entre espaces euclidiens est dite continue au point $u \in V$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in V, d_V(u,x) < \eta \Rightarrow d_{V'}(f(x), f(u)) < \epsilon$$

f est dite continue sur V si elle est continue en tout point $u \in V$.

Arcs et connexité par arcs

Un arc dans l'espace V est une application continue

$$\alpha : [0,1] \subset \mathbf{R} \longrightarrow V.$$

Une partie $P \subset V$ est dite connexe par arcs si quels que soient $p, q \in P$ il existe un arc $\alpha : [0,1] \to P \subset V$ tel que $p = \alpha(0)$ et $q = \alpha(1)$.

Composition: Si $\alpha, \beta : [0,1] \to V$ sont deux arcs avec $\alpha(1) = \beta(0)$, on peut les composer par concaténation comme suit

$$\begin{aligned} \alpha \star \beta(t) &= \alpha(t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ &= \beta(2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Arc inverse: $\overleftarrow{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$

Soit $P \subset V$ et $p \in P$. P est connexe par arcs ssi quel que soit $q \in P$ il existe un arc $\alpha_{pq} : [0,1] \to P$ tel que $\alpha_{pq}(0) = p$ et $\alpha_{pq}(1) = q$.

Remarque: Un lacet au point $v \in V$ est un arc α tel que $\alpha(0) = v = \alpha(1)$.

$M_n(\mathbf{R})$ est euclidien

L'ensemble $M_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées réelles de taille n est isomorphe à $\mathbf{R}^{n^2}$ et dès lors euclidien pour le produit scalaire usuel: Si $A = (a_{ij})$ et $A' = (a'_{ij})$,

$$(A \mid A') = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} a'_{ij}.$$

Remarquer que

$$(A \mid A') = tr({}^t A \, A').$$

Il s'ensuit que $M_n(\mathbf{R})$ est naturellement un espace métrique et dès lors l'ensemble des matrices inversibles $Gl_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{R})$ ainsi que l'ensemble des matrices orthogonales $O_n \subset M_n(\mathbf{R})$ sont munis d'une distance.

Raffinements: Il se fait que $Gl_n\mathbf{R}$ est ouvert dans $M_n\mathbf{R}$ tandis que $O_n \subset M_n\mathbf{R}$ est un fermé borné, i.e. un compact. Toutefois nous n'utiliserons pas ces propriétés (cf M1 l'an prochain).

Théorème

$O_n^{\pm} = \{M \in O_n \mid Det(M) = \pm 1\} \subset M_n(\mathbf{R})$ sont des espaces métriques connexes par arcs.

Démo: On utilise la forme normale matricielle de la section 4. Soit $M \in O_n^+$ et

$$M = P \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix} {}^tP,$$

sa forme normale.

on a

$$Det(M) = +1 = (-1)^{p_-} Det R(\theta_1) \cdots Det R(\theta_r) = (-1)^{p_-}$$

Il s'ensuit que $p_- \in 2\mathbf{N}$. On peut donc écrire la matrice -1_{p_-} qui apparait dans la forme normale en regroupant les -1 deux par deux:

$$-1_{p_-} = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1_2 \end{pmatrix}$$

Observer ensuite que

$$-1_2 = \begin{pmatrix} cos(\pi) & -sin(\pi) \\ sin(\pi) & cos(\pi) \end{pmatrix} = R(\pi).$$

Considérer le chemin $M : [0,1] \to O_n^+ : t \mapsto M(t)$ défini par

$$M(t) = P \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & R(t\pi) & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R(t\pi) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & R(t\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R(t\theta_r) \end{pmatrix} {}^tP.$$

On a $\forall t \in [0,1], M(t) \in O_n^+$ et $M(0) = 1_n$, $M(1) = M$. Enfin l'arc $M(t)$ est continu puisque chaque composante est continue (en fait de classe C^∞).

Il reste à vérifier la connexité par arcs de $O_n^-, n \geq 2$. Soit $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}$. Clairement $Q \in O_n^-$ et $Q^2 = 1_n$. L'application

$$O_n^- \to O_n^+ : M_- \mapsto QM_-$$

est un homéomorphisme de réciproque $M_+ \mapsto QM_+$. Dès lors si $\Gamma_+ : [0,1] \to O_n^+$ est un arc connectant QM_- à 1_n, l'arc $\Gamma_- : [0,1] \to O_n^- : t \mapsto Q\,\Gamma(t)$ connecte M_- à Q.

Remarques: Pour $n = 2, 3$, la connexité par arcs des groupes de rotations O_2^+ et O_3^+ est biensûr intuitive: *on peut continument faire pivoter un objet autour d'un axe.*

On vient de voir que le groupe O_n a deux composantes connexes par arcs homéomorphes. Par contraste, le groupe unitaire U_n des matrices U de type $n \times n$ à coefficients complexes vérifiant ${}^t\overline{U}U = I_n$ est connexe par arcs. Ici $\overline{U}$ désigne la conjugaison complexe.

Application: Pour $n \geq 2$, la sphère

$$S_{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \;\; \| \vec{x} \| = 1\}$$

est un espace métrique connexe par arcs.

Démo:
La sphère S_{n-1} est munie de la distance induite de $\mathbf{R}^n$.
Pour $n = 2$, c'est le cercle de centre $(0,0)$ de $\mathbf{R}^2$. C'est donc un arc.

Soit $n > 2$ et $\vec{x} \in S_{n-1}$. On va montrer qu'il existe un arc sur la sphère connectant $\vec{x}$ au premier vecteur $\vec{e}_1 \in S_{n-1}$ de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$ (il est de norme 1), il existe une (en fait une infinité de) base(s) de $\mathbf{R}^n$ de premier vecteur $\vec{x}$. En appliquant Gram-Schmidt à cette base on obtient une base orthonormée A de premier vecteur $\vec{x}$.
On sait que la matrice P de passage de la base canonique $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ à la base A appartient à O_n. Quitte à permuter les deux derniers vecteurs de la base A, on peut supposer que $P \in O_n^+$.
Puisque O_n^+ est connexe par arcs, il existe un arc

$$\Gamma : [0,1] \longrightarrow O_n^+$$

tel que $\Gamma(0) = \mathbf{1}_n$ et $\Gamma(1) = P$.
On définit alors un arc

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n$$

en posant

$$\gamma(t) = \Gamma(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que γ convient: Puisque $\Gamma(t) \in O_n$, on a bien $\gamma(t) \in S_{n-1}$ pour tout $t \in [0,1]$. Enfin $\gamma(0) = \vec{e}_1$ et $\gamma(1) = P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}$.

6 - Orientation d'un espace euclidien

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de V et $P = [Id_V, \mathcal{B}', \mathcal{B}] \in Gl_n\mathbf{R}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de V en posant $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ ssi $Det(P) > 0$.

Il y a deux classes d'équivalence et chacune d'elle est appelée *une orientation* de V.

Choisir une orientation c'est donc choisir une base.

Remarque importante: L'orientation est liée au fait que $\mathbf{R}^\star$ a deux composantes connexes $\mathbf{R}_{>0}$ et $\mathbf{R}_{<0}$. On ne peut pas orienter un espace complexe car $\mathbf{C}^\star$ est connexe par arcs.

Produit mixte, produit vectoriel

Fixons l'orientation en choisissant une base orthonormée $\mathcal{A} = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V (si $V = \mathbf{R}^n$, on prendra souvent la base canonique). Une base sera dite directe si elle appartient à la classe de $\mathcal{A}$.

Soit $X = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ un $n-$ uplet d'éléments de V et, par abus de langage, notons $[Id_V, X, \mathcal{A}]$ la matrice des composantes des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans la base $\mathcal{A}$.

Observation: Si $\mathcal{A}'$ est une base orthonormée directe

$$Det[Id_V, X, \mathcal{A}'] = Det[Id_V, X, \mathcal{A}]$$

En effet

$$[Id_V, X, \mathcal{A}'] = [Id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}'][Id_V, X, \mathcal{A}]$$

et la matrice de passage $[Id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}'] \in O_n^+$ et dès lors son déterminant vaut 1.

Le réel

$$[v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n] = Det[Id_V, X, \mathcal{A}]$$

est donc indépendant du choix de la base orthonormée dans une classe d'orientation fixée. Ce réel s'appelle le produit mixte des v_i, $1 \leq i \leq n$. C'est l'unique forme $n-$ linéaire alternée

$$\phi : V^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

telle que $\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.

Pour rappel, l'application $\mathcal{B} : V \to V^* : u \mapsto (u \mid \cdot)$ est un isomorphisme, i.e. pour toute application linéaire $\alpha : V \to \mathbf{R}$ il existe un unique vecteur $u_\alpha \in V$ tel que

$$\alpha(v) = (u_\alpha \mid v), \forall v \in V \tag{$\star$}$$

Pour $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ fixés, l'application

$$\alpha : V \to \mathbf{R} : v \mapsto [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v]$$

est linéaire en v. L'unique vecteur $u_\alpha \in V$ satisfaisant $(\star)$ est noté $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$ et est appelé le *produit vectoriel* de $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Remarque: Si $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est libre et $v \notin < v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} >$, alors $(v_1 \wedge v_2 \ldots \wedge v_{n-1} \mid v) = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v] \neq 0$. Par contre, $(v_1 \wedge v_2 \ldots \wedge v_{n-1} \mid v_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dès lors $< v_1, \ldots, v_{n-1} >^\perp = < v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} >$.

Exemple: Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ (observer la permutation cyclique) et $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$. C'est le produit vectoriel *usuel* dans l'espace.

Pour d'autres propriétés cf TD.

7- Espace affine euclidien, groupe des isométries affines

Un espace affine (X, V) réel de dimension finie n est appelé euclidien si $(V, (\mid))$ est un espace vectoriel euclidien.

L'application

$$d : X \times X \to \mathbf{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{(\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xy})}$$

est (on le sait cf Chapitre 1) une distance sur X.

Isométries affines

Si (X, V) et (X', V') sont affines euclidiens une application affine $f : X \to X'$ est appelée une isométrie si $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

Il est facile de voir que f est une isométrie ssi $L_f : V \to V'$ est une isométrie vectorielle. En particulier, une application affine $f : X \to X$ est une isométrie ssi $L_f \in O(V)$.

Proposition: L'ensemble $Is(X)$ des isométries affines de X est un sous-groupe du groupe affine $GA(X)$. $Is(X)$ est en bijection avec l'ensemble $V \times O(V)$.

Démo: Le fait que $Is(X)$ est un sous-groupe résulte de $f \in Is(X) \Leftrightarrow L_f \in O(V)$.

Pour la bijection, on sait (cf Chapitre 1) que pour tout point $o \in X$ l'application

$$\sigma : GA(X) \to V \times Gl(V) : f \mapsto (\overrightarrow{of(o)}, L_f)$$

est une bijection. La bijection recherchée est simplement la restriction de σ aux isométries affines i.e.

$$\sigma_{Is(X)} : Is(X) \to V \times O(V)$$

Comme pour le groupe orthogonal on considère

$$Is^{\pm}(X) = \{f \in Is(X) \mid Det L_f = \pm 1\}$$

On a $Is(X) = Is^+(X) \cup Is^-(X)$. $Is^+(X) \subset Is(X)$ est un sous-groupe distingué appelé le *groupe des déplacements* de X tandis que $Is^-(X) \subset Is(X)$, appelé l'ensemble des *antidéplacements* de X, n'est pas un sous-groupe.

Connexité par arcs

Remarques: Pour les étudiants peu familiers avec les notions topologiques, il n'est pas indispensable (pour ce cours) de détailler la preuve de la connexité par arcs de $Is^{\pm}(X)$ qui suit.

Remarquer toutefois que celle-ci reflète une propriété bien naturelle de nos déplacements quotidiens: on peut les faire et les défaire continument.

Quelques observations générales:

(1) Si (X, d_X) est un espace métrique, Y un ensemble et $\phi : Y \to X$ est une bijection, alors l'application

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbf{R} : (y, y') \mapsto d_X(\phi(y), \phi(y'))$$

est une distance sur Y.

(2) Si (X, d_X) et $(X', d_{X'})$ sont des espaces métriques alors $X \times X'$ aussi pour la distance

$$d : (X \times X') \times (X \times X') \to \mathbf{R} : ((x, x'), (y, y')) \mapsto \sqrt{d_X^2(x, y) + d_{X'}^2(x', y')}$$

Si X et X' sont connexes par arcs, alors $X \times X'$ aussi. En effet, si γ est un arc dans X joignant a à b et γ' est un arc dans X' joignant a' à b', l'application

$$[0, 1] \to X \times X' : t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$$

est un arc connectant (a, a') à (b, b').

(3) Choisissons une base orthonormée A de V. Puisque l'application qui à $f \in End(V)$ associe la matrice $[f]$ dans la base A est une bijection de $End(V)$ sur $M_n\mathbf{R}$, par (1) $End(V)$ est muni d'une distance. Dès lors $O(V) \subset End(V)$ l'est aussi . Par (2), le produit $V \times O(V)$ est métrique. Enfin, puisque $Is(X)$ est en bijection avec $V \times O(V)$, $Is(X)$ admet lui aussi une distance et dès lors $Is^{\pm}(X) \subset Is(X)$ aussi.

Proposition Les espaces métriques $Is^{\pm}(X)$ sont connexes par arcs.

Démo: Par construction, $\sigma : Is(X)^{\pm} \to V \times O(V)^{\pm}$ est une isométrie. D'autre part, V est un espace vectoriel réel donc il est convexe et donc connexe par arcs et $O^{\pm}(V)$ sont connexes par arcs car ils sont en bijection avec $O_n^{\pm}$ qui sont connexes par arcs. Dès lors $V \times O^{\pm}(V)$ est connexe par arcs et donc $Is^{\pm}(X)$ aussi.

Décomposition des isométries affines

Théorème: Pour toute $f \in Is(X)$ il existe un unique $\vec{u} \in V$ et une unique isométrie affine $g \in Is(X)$ admettant au moins un point fixe, tels que

$$f = \tau_{\vec{u}} \circ g = g \circ \tau_{\vec{u}}.$$

De plus f admet un point fixe ssi $\vec{u} = \vec{0}$.

Démo: On commence par quelques observations:

(1) $f = \tau_{\vec{u}} \circ g \Rightarrow L_f = L_g$.

(2) On sait que $g \circ \tau_{\vec{u}} \circ g^{-1} = \tau_{L_g(\vec{u})}$. Dès lors $g \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ g \Rightarrow \vec{u} \in Ker(L_g - Id_V) = Ker(L_f - Id_V)$.

(3) Si a est un point fixe de g, $f(a) = (\tau_{\vec{u}} \circ g)(a) = g(a) + \vec{u} = a + \vec{u}$, i.e. $\overrightarrow{af(a)} = \vec{u}$.

(4) Quel que soit $f \in Is(X)$, $Im(L_f - Id_V) = Ker(L_f - Id_V)^{\perp}$.

Vérifions cette affirmation: Soit $v \in Ker(L_f - Id_V)$ et $v' = L_f(w) - w \in Im(L_f - Id_V)$. On a $(v \mid v') = (v \mid L_f(w)) - (v \mid w) = (L_f(v) \mid L_f(w)) - (v \mid w) = 0$ puisque $L_f \in O(V)$. Dès lors $Im(L_f - Id_V) \subset Ker(L_f - Id_V)^{\perp}$. Enfin, le thm du rang appliqué à $L_f - Id_V$ montre que ces deux sous-espaces ont même dimension.

En particulier,

$$\begin{aligned} V &= Ker(L_f - Id_V) \oplus Ker(L_f - Id_V)^{\perp} \\ &= Ker(L_f - Id_V) \oplus Im(L_f - Id_V) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Au travail maintenant: Existence: Par (2) et (3), on cherche $a \in X$ tel que $\overrightarrow{af(a)} \in Ker(L_f - Id_V)$. Pour ce faire on choisit un point $m \in X$ arbitraire et on décompose $\overrightarrow{mf(m)}$ comme en (4 $(\star)$):

$$\overrightarrow{mf(m)} = \vec{u} + L_f(\vec{w}) - \vec{w} \in V, \vec{u} \in Ker(L_f - Id_V),\ \vec{w} \in V$$

On a $f(m) = m + \overrightarrow{mf(m)}$ d'où $f(m - \vec{w}) = f(m) - L_f(\vec{w}) = m - \vec{w} + \vec{u}$. Dès lors $a = m - \vec{w}$ convient.

Posons $g = \tau_{-\vec{u}} \circ f$. On a $L_g = L_f \in O(V)$ dès lors $g \in Is(X)$; aussi $g(a) = a$ et $L_g\vec{u} = L_f\vec{u} = \vec{u} \Rightarrow g \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ g$.

Unicité: Supposons $f = \tau_{\vec{u}} \circ g = \tau_{\vec{v}} \circ h$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{af(a)}, \vec{v} = \overrightarrow{bf(b)} \in Ker(L_f - Id_V), g(a) = a, h(b) = b$. Alors

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= \overrightarrow{af(a)} - \overrightarrow{bf(b)} \\ &= \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bf(a)} + \overrightarrow{f(b)b} \\ &= \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{f(b)f(a)} \\ &= (Id_V - L_f)(\overrightarrow{ab}) \end{aligned}$$

dès lors $\vec{u} - \vec{v} \in Ker(L_f - Id_V) \cap Im(L_f - Id_V) = \{\vec{0}\}$. D'où $\vec{u} = \vec{v}$ et dès lors $g = h$.

Reste à étudier l'existence de points fixes de f : Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $f = g$ et admet donc un point fixe.

Réciproquement: si f admet un point fixe a', $\overrightarrow{a'f(a')} = \vec{0} \in Ker(L_f - Id_V)$. On peut donc choisir a' dans la construction d'existence auquel cas $\vec{u} = \vec{0}$!

Isométries affines en dimensions 2 et 3.

Soit (X, V) un espace affine euclidien. Le théorème qui précède ainsi que la forme normale des endomorphismes orthogonaux permet de faire la liste des types d'isométries de X lorsque $dim(X) = 2, 3$.
Voici cette liste (pour les détails cf TD)

$n = 2$:

$Is^+(X)$: sans point fixe: les translations; avec point fixe: les rotations autour de ce point.

$Is^-(X)$: avec point fixe: les réflexions affines qui sont les symétries affines s telles que L_s soit une réflexion linéaire; sans point fixe: les réflexions (ou symétries) glissées qui sont la composée d'une réflexion affine s et d'une translation $\tau_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u} \in Ker(L_s - Id_V) \setminus \{\vec{0}\}$.

$n = 3$:

$Is^+(X)$: sans point fixe: les translations, les vissages qui sont la composée d'une rotation r autour d'un axe D de direction $Ker(L_f - Id_V)$ et d'une translation $\tau_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u} \in Ker(L_f - IdV) \setminus \{\vec{0}\}$; avec point fixe: les rotations autour d'un axe,

$Is^-(X)$: avec point fixe: les réflexions affines, les composées d'une réflexion affine s et d'une rotation r d'axe D de direction $Ker(L_s + Id_V)$; sans point fixe: les réflexions (ou symétries) glissées.

8- Notion d'angle

Préambule: Si $(V, (\,|\,))$ est un espace vectoriel euclidien, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| (u \mid v) | \leq \| u \| \| v \|$$

montre qu'il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$cos(\theta) = \frac{(u \mid v)}{\| u \| \| v \|}$$

Le réel θ est communément appelé *angle non orienté* des vecteurs u et v.

Lorsque $dim(V) = 2$, on peut définir une notion d' *angle orienté* intimement liée au groupe (commutatif en dimension 2) des rotations $O^+(V)$:

Angles orientés dans le plan euclidien

Lemme: Soient $u, v \in V$ de norme 1. Il existe une unique rotation $f \in O^+(V)$ telle que $f(u) = v$.

Démo: Complétons u en une base orthonormée $(u, \overline{u})$. Dans cette base la matrice de toute rotation f s'écrit $[f] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$. Dès lors la condition $v = f(u) = a\,u + b\,\overline{u}$ détermine f.

Soit $\hat{A} = \{(u, v) \mid \| u \| = 1 = \| v \|\}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de V.
On définit une relation d'équivalence sur $\hat{A}$ en déclarant que $(u, v) \sim (u', v')$ ssi il existe une rotation $r \in O^+(V)$ telle que $r(u) = u'$ et $r(v) = v'$ et on appelle *angle orienté* de vecteurs

toute classe d'équivalence $[u, v]$ pour cette relation. On notera $A = \hat{A}/\sim$ l'ensemble des angles orientés.
Remarque: Cete définition reflète l'idée intuitive que les couples (u, v) et $(r(u), r(v))$ définissent bien le même angle.

Par le lemme, on a une application $\hat{\phi} : \hat{A} \to O^+(V)$ qui au couple (u, v) associe l'unique rotation f telle que $f(u) = v$. Cette application est surjective puisque quel que soit u unitaire, $\hat{\phi}(u, f(u)) = f$, ce qui montre aussi qu'elle n'est pas injective.

Lemme: $\hat{\phi}(u, v) = \hat{\phi}(u', v')$ ssi $(u, v) \sim (u', v')$.
Démo: Supposons qu'il existe $f \in O^+(V)$ telle que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$ et soit $r \in O^+(V)$ l'unique rotation telle $r(u) = u'$. On a $f(r(u)) = f(u') = v'$. D'autre part, puisque $O^+(V)$ est commutatif en dimension 2, on a aussi $v' = f(r(u)) = r(f(u)) = r(v)$, i.e. $(u', v') = (r(u), r(v))$.
La réciproque est identique: si $r \in O^+(V)$ est telle que $(r(u), r(v)) = (u', v')$ alors pour l'unique rotation f telle que $v = f(u)$, on a $v' = r(v) = r(f(u)) = f(r(u)) = f(u')$, i.e. $\hat{\phi}(u, v) = \hat{\phi}(u', v')$.

Ce lemme implique que $\hat{\phi}$ passe au quotient i.e. induit une application

$$\phi : A \to O^+(V) : [u, v] \mapsto f.$$

ϕ est une bijection de réciproque $f \mapsto [w, f(w)]$ où $w \in V$ est un vecteur unitaire arbitraire.

Les angles orientés forment un groupe.

On définit l'addition $+ : A \times A \to A$ en transportant la composition $\circ$ de $O^+(V)$ sur A au moyen de la bijection ϕ :

$$[u, v] + [u', v'] = \phi^{-1}(\phi[u, v] \circ \phi[u', v'])$$

En clair: Si $u, u', u'' \in V$ sont unitaires

$$[u, f(u)] + [u', f'(u')] = [u'', (f \circ f')(u'')].$$

On sait (cf Chapitre 1) que $(A, +)$ est un groupe commutatif (puisque $(O^+(V), \circ)$ l'est). Le neutre pour $+$ est l'angle *nul* $[u, u]$. On appelle angle *plat* l'angle $[u, -u]$; on a $[u, -u] + [u, -u] = [u, (-Id_V \circ -Id_V)(u)] = [u, u]$. Un angle $[u, v]$ tel que $2[u, v]$ soit plat est appelé *angle droit*.
Relation de Chasles: Quels que soient $u, v, w \in V$ unitaires, $[u, v] + [v, w] = [u, w]$.

Remarque: Il est important de remarquer que la notion d'angle a été introduite sans utiliser de *mesure* d'un angle, i.e. sans attacher un nombre réel à une classe $[u,v]$. C'est ce qu'on se propose de faire à présent:

Orientation et mesure d'un angle orienté.

Choisissons une orientation, i.e. une base orthonormée $\mathcal{A}=(a_1,a_2)$ de V. Observer que la matrice d'une rotation $f \in O^+(V)$ est indépendante du choix de la base orthonormée dans la classe de $\mathcal{A}$: En effet, si $\mathcal{A}'$ est une base orthonormée directe

$$[f,\mathcal{A}',\mathcal{A}'] = [Id_V,\mathcal{A},\mathcal{A}']\,[f,\mathcal{A},\mathcal{A}]\,[Id_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}]$$

Et chacune de ces matrices appartient à O_2^+ qui est commutatif, dès lors

$$[f,\mathcal{A}',\mathcal{A}'] = [Id_V,\mathcal{A},\mathcal{A}']\,[Id_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}]\,[f,\mathcal{A},\mathcal{A}] = [f,\mathcal{A},\mathcal{A}].$$

On a donc une bijection de A sur O_2^+:

$$\begin{gathered}\mathcal{A} \to O^+(V) \to O_2^+\\ [u,f(u)] \mapsto f \mapsto [f] = [f,\mathcal{A},\mathcal{A}]\end{gathered}$$

qui est indépendante du choix de la base orthonormée dans une orientation donnée.

On appelle *mesure* de $[u,f(u)]$ tout réel θ tel que $[f] = R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{pmatrix}$.

Si θ est une mesure de $[u,f(u)]$, l'ensemble des mesures de $[u,f(u)]$ est $\theta + 2\pi\mathbf{Z}$.
0 est une mesure de l'angle nul $[u,u]$, π est une mesure de l'angle plat $[u,-u]$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2}$ sont des mesures d'un angle droit. Si θ est une mesure de $[u,v]$, $-\theta$ est une mesure de $[v,u]$.
On appelle *angle géométrique* l'angle obtenu en *oubliant* de distinguer $[u,v]$ et $[v,u]$ et *mesure de l'angle géométrique* l'unique réel $\theta \in [0,\pi]$ tel que θ soit une mesure de $[u,v]$ ou de $[v,u]$. Ce θ est ce que mesure un rapporteur.
Remarquer que la mesure de l'angle géométrique coincide avec l'angle non orienté du préambule.

Un diagramme de groupes

Soit $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid\mid z \mid= 1\}$ le cercle unité de $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$. Pour rappel $S^1 \subset \mathbf{C}^\star$ est un sous-groupe pour la multiplication complexe. Il est facile de vérifier que l'application $S^1 \to O_2^+ : a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes.
Par ailleurs, l'application

$$\mathbf{R} \to S^1 : \theta \mapsto cos(\theta) + i\,sin(\theta)$$

est un morphisme surjectif de groupes de noyau $2\pi\mathbf{Z}$. Dès lors, elle induit un isomorphisme de groupes:

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S^1 : \theta + 2\pi\mathbf{Z} \mapsto cos(\theta) + i\,sin(\theta).$$

Ici, $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z},+)$ est le groupe quotient i.e. l'espace quotient pour la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$ définie par $x \sim x'$ ssi $x - x' \in 2\pi\mathbf{Z}$ muni de l'addition $(\theta + 2\pi\mathbf{Z}) + (\theta' + 2\pi\mathbf{Z}) = (\theta + \theta') + 2\pi\mathbf{Z}$. On a donc la suite d'isomorphismes:

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S^1 \to O_2^+ \to A$$

où la dernière flèche est la réciproque de ϕ.

Quelques propriétés des angles.

(1) Les réflexions vectorielles renversent les angles orientés i.e. pour toute paire u, v de vecteurs unitaires,

$$[s(u), s(v)] = [v, u].$$

Démo: Soit s' la réflexion de droite fixe $< u - v >^{\perp}$. On a $s'(u) = v$ et dès lors $s'(v) = u$. Puisque $s \circ s' \in O^+(V)$ on a $[v, u] = [s \circ s'(v), s \circ s'(u)] = [s(u), s(v)]$.

(2) Pour trois points distincts A, B, C la somme

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] + [\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}]$$

est un angle plat.

La démo utilise $[u, v] = [-u, -v]$ car en dimension 2, $-Id_V \in O^+(V)$ et la relation de Chasles pour les angles.

(3) (*Angles inscrits*) Si A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O, on a

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 2[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$$

Similitudes

Soit $(V, (\,|\,))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et $f : V \to V$ une application linéaire.

f est une similitude s'il existe un réel $k > 0$ appelé le rapport de la similitude tel que quel que soit $u \in V$, $\| f(u) \| = k \| u \|$.

Les similitudes vectorielles forment un groupe pour la composition.

Proposition: Soit f une similitude vectorielle de rapport $k > 0$ et h_k l'homothétie $h_k = k\, Id_V$. Il existe une unique isométrie $g \in O(V)$ tel que $f = h_k \circ g$.

Démo: Il suffit de poser $g = h_{\frac{1}{k}} \circ f$.

Une similitude est dite *directe* si $Det(f) > 0$ et indirecte si $Det(f) < 0$.

Soit (X, V) un espace affine euclidien et $f : X \to X$ une application affine. f est appelée une similitude affine de rapport $k > 0$ si L_f est une similitude vectorielle.

On dira qu'une similitude affine est directe (indirecte) si L_f est directe (indirecte).

Propriétés:

(1) Supposons $dim(X) = 2$. Les similitudes affines directes conservent les angles orientés de vecteurs.

Démo: Il faut montrer que quels que soient $A, B, C \in X$ on a

$$[\frac{\overrightarrow{AB}}{\| \overrightarrow{AB} \|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AC} \|}] = [\frac{\overrightarrow{f(A)f(B)}}{\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \|}, \frac{\overrightarrow{f(A)f(C)}}{\| \overrightarrow{f(A)f(C)} \|}]$$

Ceci résulte immédiatement de la définition d'une similitude directe.

(2) Plus généralement, si $dim(X) = n$, les similitudes conservent les angles non orientés ou géométriques.

(3) Supposons $dim(X) = 2$. Soit $A, B, A', B' \in X$ avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude affine directe telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Démo: La condition $L_f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ montre que le rapport $k = \frac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ et $L_f = (kId_V) o l$ où $l \in O^+(V)$ est l'unique rotation telle que $l(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}) = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\|\overrightarrow{A'B'}\|}$ ce qui détermine L_f univoquement et donc f puisque $f(A) = A'$.

CHAPITRE III

Pour rappel (cf Chapitre 1), un polyèdre convexe d'un espace affine (euclidien) X est une partie $P \subset X$ qui est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés

$$P = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(\mathbf{R}_{\geq 0})$$

où pour chaque i de l'ensemble fini I, $f_i : X \to \mathbf{R}$ est une application affine non constante.

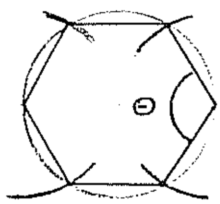
Un *Polytope* de X est un polyèdre convexe, compact, d'intérieur non vide. En dimension 2 un polytope est appelé un *polygone*.

On se propose dans ce chapitre d'esquisser la classification des *polytopes réguliers* en dimension 2 et 3.

Polygones réguliers

Soit P un polygone du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ ayant l sommets $S_1, S_2, \ldots, S_l$ (pour faire court soit P un $l-$ gone).

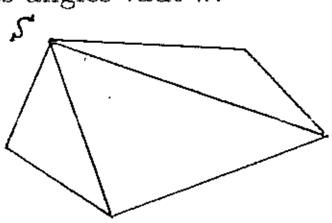
P est dit *régulier* si tous ses côtés ont la même longueur a et tous ses angles géométriques ont la même mesure θ, par exemple:



$\Theta = \frac{2\pi}{3}$

Lemme Si P est un $l-$ gone de $\mathbf{R}^2$, la somme des mesures de ses angles géométriques vaut $(l-2)\pi$. Dès lors si P est régulier, la mesure commune de ces angles vaut $\theta = \frac{l-2}{l}\,\pi$.

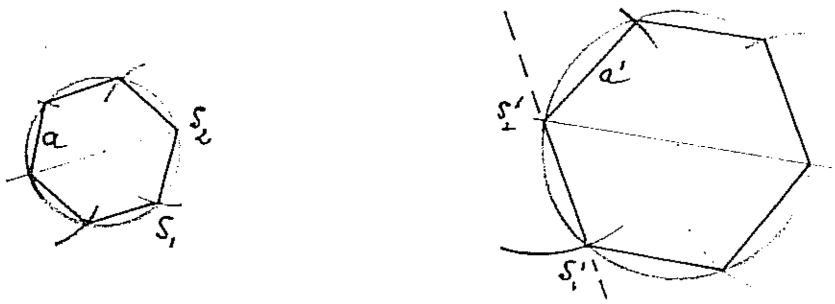
Démo: Choisir un sommet S de P et décomposer P en $l-2$ triangles comme dans la figure (Une telle décomposition est appelée une triangulation de P.) et observer que pour chaque triangle la somme des mesures des angles vaut π.



Proposition Quel que soit l'entier $l \geq 3$ il existe un $l-$gone régulier de $\mathbf{R}^2$. Deux $l-$gones réguliers sont semblables.

Démo: Pour l'existence, il suffit de prendre le $l-$ gone P dont les sommets sont les racines $l-$ ième de l'unité dans $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

Soit maintenant deux $l-$ gones réguliers P et P' de sommets respectifs $S_1, \ldots, S_l$ et $S'_1, \ldots, S'_l$ et de longueur de côtés respective a et a'. On veut montrer qu'il existe une similitude affine $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(S_i) = S'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$. Pour ce faire, considérer l'unique similitude affine f telle que $f(S_1) = S'_1$ et $f(S_2) = S'_2$. L'ensemble $f(P)$ est un $l-$gone régulier de longueur de côtés a' et de mesure d'angles $\frac{l-2}{l}\pi$ entièrement situé dans l'un des deux demi-espaces définis par la droite $< S'_1, S'_2 >$.



S'il est situé dans le même demi-espace que P', l'égalité des longueurs et des angles donne $f(P) = P'$. Sinon, soit s la réflexion affine de droite fixe $< S'_1, S'_2 >$. La similitude affine $s \circ f$ envoie alors P sur P'.

Polytopes réguliers en dimension 3.

Soient $P \subset \mathbf{R}^3$ un polytope, S le nombre de ses sommets, A le nombre de ses arêtes et F le nombre de ses faces.

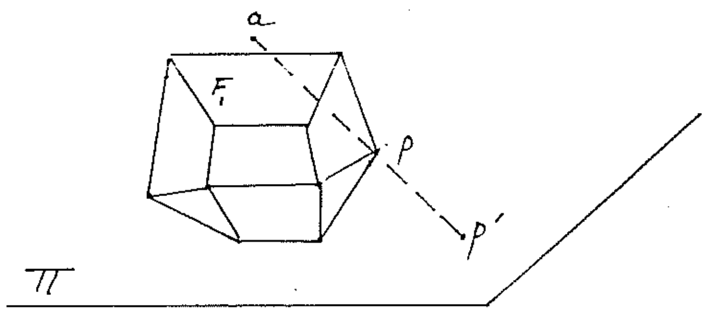
Théorème d'Euler

$$S - A + F = 2$$

Démo: On a

$$P = \bigcap_{1 \le i \le F} f_i^{-1}(\mathbf{R}_{\ge 0})$$

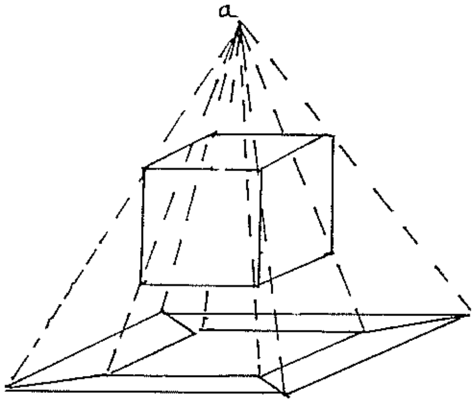
Choisir une face de P, par exemple $F_1 \subset f_1^{-1}(0)$, et un point a de $\mathbf{R}^3 \setminus P$ tel que a n'appartienne à aucun des plans $f_i^{-1}(0), 1 \le i \le F$. Enfin choisir un plan Π parallèle à la face F_1, comme dans la figure



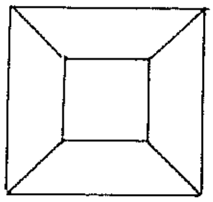
Considérer l'application

$$f : P \to \Pi : p \mapsto p'$$

où p' est l'unique point d'intersection de la droite $< a, p >$ avec le plan Π. L'application f établit une bijection entre les sommets, les arêtes et les faces de P autres que F_1 et un ensemble de points, de segments et de polygones convexes du plan Π. Pour le cube:



Pour obtenir la formule d'Euler, on va sommer les mesures des angles géométriques des polygones de $f(P) \subset \Pi$ de deux manières différentes.
Soit n_k le nombre de $k-$ gones de $f(P)$ autres que $f(F_1)$. Puisque chaque face de P correspond à un polygone de $f(P)$, on a $\sum_k n_k = F - 1$. Pour le cube:

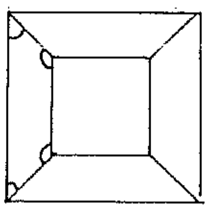


$\sum_k n_k = n_4 = 5$

Puisque la somme des angles d'un $k-$ gone est $(k-2)\pi$, la somme Σ des angles des polygones de $f(P)$ exceptés ceux de $f(F_1)$ vaut

$$\Sigma = \sum_k n_k(k-2)\pi = \pi \sum_k k\, n_k - 2\pi(F-1) \qquad (\star)$$

Pour le cube:



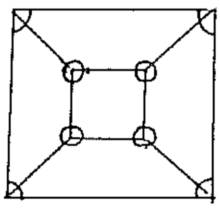
$n_4 \cdot (4-2)\pi = 10\pi$

Par ailleurs, on peut calculer Σ en considérant que les S_1 sommets extérieurs (ceux de

$f(F_1))$ contribuent $(S_1 - 2)\pi$ et les $(S - S_1)$ sommets intérieurs de $f(P)$ contribuent chacun 2π i.e.

$$\Sigma = 2\pi(S - S_1) + \pi(S_1 - 2) = \pi(2S - S_1 - 2) \qquad (\star\star)$$

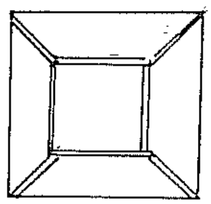
Pour le cube:



Il reste à évaluer $\sum_k k\, n_k$. C'est le nombre d'arêtes projetées comptées avec multiplicités: les arêtes intérieures sont comptées deux fois et les arêtes extérieures (celles de $f(F_1)$) sont comptées une seule fois. Comme chaque face a autant d'arêtes que de sommets, on a

$$\sum_k k\, n_k = 2(A - S_1) + S_1 = 2A - S_1$$

Pour le cube:



En comparant $(\star)$ et $(\star\star)$ il vient $S - A + F = 2$.

Corollaire: Soit $f, s \in \mathbb{N}$. Supposons que le polytope P soit tel que (1) chaque sommet de P porte f arêtes, (2) chaque face a s sommets. Alors $s, f \in \{3, 4, 5\}$ et (f, s, A, F, S) peut prendre cinq valeurs distinctes.

Démo: *Quelques remarques préalables:*

(1) Toute face a au moins trois sommets i.e. $s \geq 3$.

(2) Chaque sommet porte au moins trois arêtes i.e. $f \geq 3$.

(3) Chaque face a s sommets donc s arêtes et chaque arêtes appartient à deux faces: $2A = sF$.

(4) Chaque sommet porte f arêtes et chaque arête a deux sommets: $fS = 2A$.

Passons à la preuve: La formule d'Euler et les remarques (3) et (4) donnent la relation

$$\frac{2A}{f} - A + \frac{2A}{s} = 2$$

qui est équivalente à

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{s}=\frac{1}{A}+\frac{1}{2}.$$

Comme A est un nombre fini il vient $\frac{1}{f}+\frac{1}{s}>\frac{1}{2}$ et dès lors (cf remarques (1) et (2)) $f<6$ et $s<6$. D'où $s,f\in\{3,4,5\}$.
Si $f\geq 4$ on a $\frac{1}{s}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ i.e. $s<4$. Le même argument donne $s\geq 4\Rightarrow f<4$. Dès lors

$$(f,s)\in\{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)\}.$$

Pour chacune des valeurs de (f,s), $F=\frac{2A}{s}$, $S=\frac{2A}{f}$ et la formule d'Euler déterminent A,F,S.

Il y a donc cinq valeurs de (f,s,A,F,S):

f	s	A	F	S
3	3	6	4	4
3	4	12	6	8
3	5	30	12	20
4	3	12	8	6
5	3	30	20	12

Polytopes réguliers

Le polytope $P\subset\mathbf{R}^3$ est dit régulier de type (f,s) si

(1) toutes ses faces sont des $s-$gones réguliers isométriques, i.e. chaque face est une copie du même $s-$ gone régulier.

(2) chaque sommet appartient à f faces, i.e. porte f arêtes.

Par ce qui précède, un tel polytope régulier peut-être assembler d'au plus cinq manières combinatoires distinctes.

Théorème (Les cinq polytopes réguliers de $\mathbf{R}^3$)

Pour chacune des valeurs de (f,s,A,F,S) du tableau qui précède il existe un polytope régulier P constitué de F polygones réguliers à s côtés qui sont assemblés de manière à ce que chacun de ses S sommets appartienne à f faces.

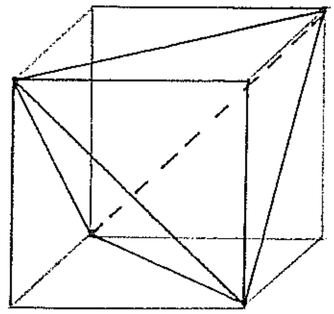
Deux polytopes réguliers de même type combinatoire sont semblables.

Démo: Pour l'existence, il suffit de les construire (voir figures ci-après). Quant à la nomenclature, Il s'agit dans l'ordre du tableau, du tétraèdre régulier (assemblage de 4 triangles équilatéraux), de l'hexaèdre régulier i.e. du cube, du dodécaèdre régulier (assemblage de 12 pentagones réguliers), de l'octaèdre régulier (assemblage de 8 triangles équilatéraux) et enfin de l'icosaèdre (assemblage de 20 triangles équilatéraux).

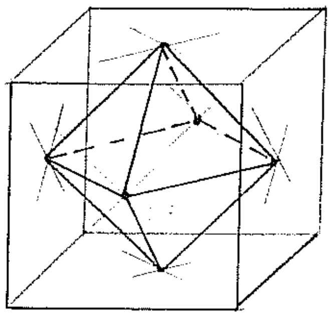
Nous ne ferons pas ici la preuve de l'unicité de ces polytopes à similitude près.

Construction des polytopes réguliers

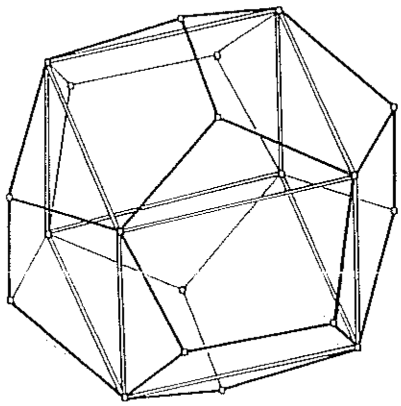
Il est facile de construire un cube C et ensuite en choisissant quatre sommets équidistants de C, d'y inscrire un tétraèdre régulier T :



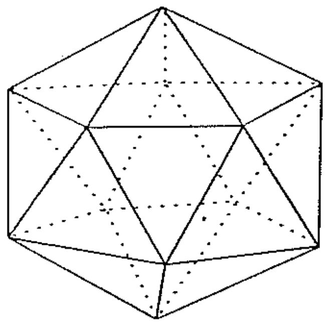
L'octaèdre régulier $C_\star$ est l'enveloppe convexe des centres des faces du cube C :



Une méthode de construction du dodécaèdre régulier D consiste à observer que l'on peut assembler douze faces pentagonales sur les sommets d'un cube C :



Enfin voici une figure de l'icosaèdre régulier $D_\star$



Remarque: l'icosaèdre régulier peut être réalisé comme enveloppe convexe des centres des faces du dodécaèdre.
Le lecteur intéressé par toutes ces questions pourra consulter l'excellente référence
- *Géométrie 3/convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes - de Marcel Berger. Ed. Nathan*
Il y trouvera notamment une autre (même plusieurs) définition(s) équivalente(s) de la régularité d'un polytope.

Pour conclure voici une application plus *ludique* de la formule d'Euler.

Le ballon de Foot
Un ballon de foot est un polytope de $\mathbf{R}^3$ constitué de faces pentagonales et hexagonales régulières assemblées de telle manière à ce que chaque sommet appartienne à 3 faces.

Combien faut-il de pentagones pour confectionner un ballon?

Soient p le nombre de pentagones, h le nombre d'hexagones et S, A, F comme dans la formule d'Euler.
Puisque chaque sommet appartient à 3 faces

$$3S = 5p + 6h$$

Puisque chaque arête appartient à 2 faces et chaque face a autant d'aretes que de sommets

$$2A = 5p + 6h$$

La formule d'Euler $S - A + F = 2$ appliquée au ballon s'écrit donc

$$\frac{5p+6h}{3} - \frac{5p+6h}{2} + p + h = 2$$

i.e.

$$p = 12.$$

Voici un ballon de foot dessiné par Leonard de Vinci (extrait du livre de Marcel Bergercité plus haut)