UNIVERSITE LYON 1
LICENCE STS
AUTOMNE 2009

Unité d'enseignement: Math I Algèbre
Contrôle final du 22 janvier 2010
Durée: 2 heures

Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Question 1. (5 pts)
(1) Déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $11\,u + 13\,v = 1$. (1 pt)
(2) Déterminer les restes de la division euclidienne de 3^{4444} par 11 et par 13. (1+1 pts)
(3) En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{4444} par 143. (2 pts)

Question 2. (4 pts)
Répondre par *vrai* ou *faux* aux énoncés qui suivent en justifiant votre réponse par un bref argument.
(1) 22^{22} a 23 diviseurs dans $\mathbf{N}$. (1 pt)
(2) Il y a 16 relations binaires sur l'ensemble $E = \{1, 2\}$. (1 pt)
(3) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} 2^l = 3^n$. (1 pt)
(4) Dans $\mathbf{Z}$ on a $4\mathbf{Z} \bigcap 6\mathbf{Z} = 12\mathbf{Z}$. (Pour un entier $n \in \mathbf{N}$, $n\mathbf{Z} = \{nl,\ l \in \mathbf{Z}\}$.) (1 pt)

Question 3. (3 pts) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation

$$z^6 - 2\,cos\alpha\, z^3 + 1 = 0$$

pour $z \in \mathbf{C}$. (1,5 pt pour $z^3 = ...$ + 1,5 pt pour les racines troisièmes)

Pour la suite, on désigne par U_n le groupe (pour la multiplication) des racines $n-$ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.

Question 4. (5 pts)
(1) Faire la liste des sous-groupes de U_{17}. (1 pt)
(2) Soit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in U_n$. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ on a

$$\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \text{ divise } m.$$

(0,5 pt pour $\Leftarrow$ + 1 pt pour $\Rightarrow$)
(*Ind: pour l'implication $\Rightarrow$ utiliser la division euclidienne.*)
(3) Déduire du point (2) que si $l \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ est premier avec n alors l'élément ω^l est d'ordre n dans U_n. (1,5 pt)
(4) Faire la liste des éléments distincts du sous-groupe $\langle \omega^{12} \rangle$ de U_{15} engendré par ω^{12}. (1 pt)

Question 5. (5 pts)
(1) Montrer que l'application

$$f : U_8 \to U_2 : z \mapsto z^4$$

est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupes. (0,5 pt + 0,5 pt + 1 pt)

(2) Faire la liste des éléments distincts du noyau $Ker\, f$ et dresser sa table de multiplication. (1,5 pt)

(3) Expliciter un isomorphisme du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ (pour l'addition) sur le groupe $Ker\, f$. (1,5 pt)
(*Pour rappel, l'addition sur l'ensemble des classes de restes* $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ *est définie par* $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.)