Université LYON 1
L1 Mathématiques
Automne 2009

UE Math I Algèbre. Seq. 1
CONTROLE CONTINU 2
(CORRIGE)

Choisir l'une des réponses proposées pour chacune des questions qui suivent en justifiant votre choix par un bref argument ou un contre-exemple.

Questions à choix multiples

(1) Si $u : E \to E'$ et $v : E' \to E$ sont deux applications bijectives alors l'application $v \circ u : E \to E$ est aussi bijective: *Vrai* *Faux*

réponse: c'est *vrai*.

- C'est injectif: en utilisant successivement l'injectivité de v et de u on a, pour $x, x' \in E$,

$$(v \circ u)(x) = (v \circ u)(x') \Leftrightarrow v(u(x)) = v(u(x')) \Rightarrow u(x) = u(x') \Rightarrow x = x'.$$

- C'est surjectif: v étant surjective, pour tout $z \in E$, il existe $z' \in E'$ tel que $z = v(z')$. D'autrepart, u étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $z' = u(x)$. Dès lors $z = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.

Voici une autre preuve: on sait par le cours qu'une application $f : A \to B$ est bijective ssi il existe une application $g : B \to A$ telle que

$$f \circ g = Id_B, \quad g \circ f = Id_A,$$

auquel cas $g = f^{-1}$.

Pour $f = v \circ u$, on observe que si u^{-1} et v^{-1} désignent les bijections réciproques de u et de v alors l'application $g = u^{-1} \circ v^{-1}$ convient.

(2) Soit $f : E \to E$ une application. Si $f \circ f = Id_E$ alors f est bijective: *Vrai* *Faux*

réponse: c'est *vrai*. C'est injectif car pour $x, x' \in E$,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow (f \circ f)(x) = (f \circ f)(x') \Leftrightarrow x = x'.$$

C'est surjectif car tout $x \in E$ s'écrit

$$x = (f \circ f)(x) = f(f(x)),$$

i.e. $f(x)$ est un antécédent de x.

(3) L'application

$$f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} : (m,n) \mapsto 2^m 3^n$$

est

(a) *surjective mais pas injective* (b) *injective mais pas surjective* (c) *bijective* (d) *ni injective, ni surjective*

réponse: (b). C'est injectif car $f(m,n) = f(m',n') \Leftrightarrow 2^m 3^n = 2^{m'} 3^{n'}$ et l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers implique $m = m', n = n'$. Pour voir que ce n'est pas surjectif, observer par exemple que pour tout $m, n \in \mathbf{N}$, $2^m 3^n \neq 0$. Plus généralement, observer que tout entier naturel ayant un facteur premier p distinct de 2 et 3 n'est pas dans l'image de f.

(4) Sur l'ensemble $E = \{a,b,c,d\}$ la relation binaire dont le graphe Γ est donné par

$$\Gamma = \{(a,a),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a)\}$$

est

(a) *réflexive, symétrique, non transitive* (b) *non réflexive, symétrique, non transitive*
(c) *non réflexive, symétrique, transitive* (d) *réflexive, antisymétrique, transitive*

réponse: (b). C'est non réflexif car, par exemple, $(b,b) \notin \Gamma$. C'est non transitif car, par exemple, $(b,a) \in \Gamma$ et $(a,b) \in \Gamma$ mais $(b,b) \notin \Gamma$. C'est symétrique car pour tout $\gamma, \gamma' \in E$,

$$(\gamma, \gamma') \in \Gamma \Leftrightarrow (\gamma', \gamma) \in \Gamma.$$

(5) Soit E un ensemble fini tel que $\mid E \mid \geq 2$. La relation d'inclusion $(A \subset B)$ est un ordre total sur $P(E)$: *Vrai* *Faux*

réponse: C'est *faux*. En fait, on vérifie immédiatement que l'inclusion est bien une relation d'ordre (réflexive, antisymétrique, transitive) mais cet ordre n'est **pas total**. En effet, par $\mid E \mid \geq 2$, $P(E)$ contient deux singletons distincts, disons $\{a\}$ et $\{b\}$, que l'on ne peut comparer puisque $\{a\} \not\subset \{b\}$ et $\{b\} \not\subset \{a\}$.

(6) Si $E = A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C = \emptyset$ alors $P = \{A,B,C\} \subset P(E)$ est une partition de E: *Vrai* *Faux*

réponse: C'est *faux*. Par exemple $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{3,4\}$ satisfont les conditions sans être une partition.

(7) Soit E un ensemble de cardinal $\mid E \mid = 2$. On pose $P^1 = P(E)$ et pour tout $n \geq 2$, $P^n = P(P^{n-1})$. On a

$$\mid P^n \mid = \left. 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} \right\} n$$

Vrai *Faux*

réponse: C'est *vrai*. On sait par le cours que $\mid P(E) \mid = 2^{|E|}$. Dès lors $\mid P^1 \mid = 2^2$ et une récurrence donne $\mid P^n \mid$.

(8) Il y a vingt listes strictement croissantes de trois entiers $l < m < n$ choisis parmi $1, 2, 3, 4, 5, 6$: *Vrai* *Faux*

réponse: C'est *vrai*. Le nombre de ces listes est le nombre de parties de cardinal 3 d'un ensemble de cardinal 6. C'est donc

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20.$$

(9) Quelquesoit l'ensemble E, il n'y a pas d'application bijective $f : E \to P(E)$.
Vrai *Faux*

réponse: C'est *vrai*. Le lemme de Cantor démontré en cours (et proposé dans la fiche d'exos) assure qu'il n'y a pas de surjection $f : E \to P(E)$.

(10) Soit $\mathbf{P} \subset \mathbf{N}$ l'ensemble des nombres premiers. Il existe une bijection $f : \mathbf{P} \to \mathbf{N}$.
Vrai *Faux*

réponse: C'est *vrai*. On a vu au chapitre 1 qu' *il y a une infinité de nombres premiers* et au chapitre 2 que *toute partie infinie de* **N** *est dénombrable*.

(11) Il y a trois classes d'ensembles: les ensembles *finis*, les ensembles *équipotents à* **N**, les ensembles *équipotents à* $P(\mathbf{N})$: *Vrai* *Faux*

réponse: C'est *faux*. Par le lemme de Cantor la suite P^n définie par $P^1 = P(\mathbf{N})$ et, pour $n \geq 2$, $P^n = P(P^{n-1})$ est une suite infinie d'ensembles non équipotents deux à deux.