

## Devoir maison 5

### Exercice 1 :

Soient  $\mathcal{R}$  une relation définie sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  par :

$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

1°) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

2°) soit  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , avec  $p \wedge q = 1$ , décrire la classe d'équivalence de  $(p, q)$ .

#### Correction

1°)  $ab = ab$  donc  $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$ ,  $\mathcal{R}$  est réflexive.

$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \Rightarrow ab' = a'b \Rightarrow a'b = ab' \Rightarrow (a', b')\mathcal{R}(a, b)$  donc  $\mathcal{R}$  est symétrique.

Si  $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$  et  $(a', b')\mathcal{R}(a'', b'')$  alors  $\begin{cases} ab' = a'b \\ a'b'' = a''b' \end{cases}$  alors  $\begin{cases} a' = \frac{ab'}{b} \\ a'b'' = a''b' \end{cases}$  car  $b \neq 0$

Donc  $\frac{ab'}{b}b'' = a''b'$ , on multiplie par  $b$  et on simplifie par  $b' \neq 0$ , on a alors  $ab'' = a''b$ , c'est-à-dire  $(a, b)\mathcal{R}(a'', b'')$ , donc  $\mathcal{R}$  est transitive.

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

2°) Si  $(a, b) \in \overline{(p, q)} \Leftrightarrow aq = pb$ , donc  $p$  divise  $aq$  et  $p \wedge q = 1$  d'après le théorème de Gauss  $p$  divise  $a$ , il existe  $d \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = dp$ , cela que l'on remplace dans  $aq = pb$ , ce qui donne  $dpq = pb$ ,  $p \neq 0$  donc  $b = dq$ , l'ensemble des couples de  $\overline{(p, q)}$  sont les couples de la forme  $(dp, dq)$ .

### Exercice 2 :

Soit  $E$  un ensemble.

On pose  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

On définit dans l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ , la relation  $\mathcal{R}$ , en posant, pour tout couple  $(A, B)$  de parties de  $E$  :

$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\Delta B$  est un ensemble fini ayant un nombre fini pair d'éléments.

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathcal{P}(E)$ .

#### Correction

$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$  a zéro élément. Donc on a  $A\mathcal{R}A$ .  $\mathcal{R}$  est réflexive.

Si  $A\mathcal{R}B$ ,  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.

Alors  $B\Delta A = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$  est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments. Donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.

Si  $A\mathcal{R}B$  et  $B\mathcal{R}C$  alors  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments et  $B\Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$  est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.

Comme  $A \cap B \subset A \cup B$ ,  $\text{Card}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A \cap B)$

$$\text{Card}(A\Delta B) = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - 2\text{Card}(A \cap B) = 2n$$

$$\text{Card}(B\Delta C) = \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(B \cap C) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - 2\text{Card}(B \cap C) = 2m$$

Donc  $\text{Card}(A) = -\text{Card}(B) + 2\text{Card}(A \cap B) + 2n$  et  $\text{Card}(C) = -\text{Card}(B) + 2\text{Card}(B \cap C) + 2m$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Card}(A\Delta C) &= \text{Card}(A \cup C) - \text{Card}(A \cap C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(C) - 2\text{Card}(A \cap C) \\ &= -\text{Card}(B) + 2\text{Card}(A \cap B) + 2n - \text{Card}(B) + 2\text{Card}(B \cap C) + 2m \\ &= 2\text{Card}(A \cap B) + 2n - 2\text{Card}(B) + 2\text{Card}(B \cap C) + 2m \end{aligned}$$

C'est un nombre fini et pair donc  $A\mathcal{R}C$ ,  $\mathcal{R}$  est transitive.

Finalement  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

Exercice 3 :

Soit  $\mathcal{R}$ , la relation définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1°) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer la classe d'équivalence de  $x$  pour tout réel  $x$ .

3°) Déterminer l'ensemble quotient.

Correction

1°)  $x^2 - x^2 = x - x$  donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.

Si  $x\mathcal{R}y$  alors  $x^2 - y^2 = x - y$  alors  $y^2 - x^2 = y - x$  alors  $y\mathcal{R}x$  donc  $\mathcal{R}$  est symétrique.

Si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$  alors  $x^2 - y^2 = x - y$  et  $y^2 - z^2 = y - z$ , en additionnant ces deux égalités on trouve  $x^2 - z^2 = x - z$ .  $\mathcal{R}$  est transitive.

Finalement  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

2°) soit  $x \in \dot{a}$  si  $x\mathcal{R}a$  c'est-à-dire si  $x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow x^2 - x + a - a^2 = 0$  autrement dit si  $x$  est solution de l'équation du second degré  $X^2 - X + a - a^2 = 0$ , évidemment  $a$  est solution, le produit des solutions est

$a - a^2 = a(1 - a)$  donc l'autre solution est  $1 - a$ . Donc  $\dot{a} = \{a, 1 - a\}$  sauf si  $a = \frac{1}{2}$  alors  $\frac{1}{2} = \{\frac{1}{2}\}$ .

3°) L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{a, 1 - a\}, a \geq \frac{1}{2}\}$$

On est obligé de considérer  $a \geq \frac{1}{2}$  (ou  $a \leq \frac{1}{2}$ ) car pour  $a \geq \frac{1}{2}$ ,  $1 - a \leq \frac{1}{2}$  donc si on considère  $a \in \mathbb{R}$ , on écrirait deux fois chaque classe.

Exercice 4 :

Soit  $\mathcal{E}$  la relation définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$$x\mathcal{E}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$

Montrer que  $\mathcal{E}$  est une relation d'ordre total.

Correction

Première méthode

$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$  donc  $x\mathcal{E}x$ ,  $\mathcal{E}$  est réflexive.

Si  $x\mathcal{E}y$  et  $y\mathcal{E}x$  alors  $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$  et  $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$  donc  $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x(1+y^2) = y(1+x^2) \Leftrightarrow x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \Leftrightarrow x - y + xy(y - x) = 0 \Leftrightarrow x - y - xy(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$  car  $x > 1$  et  $y > 1$  entraîne  $1 - xy < 0$  en particulier  $1 - xy \neq 0$ . Donc  $\mathcal{E}$  est antisymétrique.

Si  $x\mathcal{E}y$  et  $x\mathcal{E}z$  alors  $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$  et  $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$  donc  $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$ , d'où  $x\mathcal{E}z$ .  $\mathcal{E}$  est transitive.

Finalement  $\mathcal{E}$  est une relation d'ordre.

Soit  $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$  et alors  $x\mathcal{R}y$ , soit  $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$  et alors  $y\mathcal{R}x$ , il s'agit d'une relation d'ordre total.

Deuxième méthode

Soit  $f: ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ ,  $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} < 0$  donc  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$

Donc  $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \leq y$ ,  $\leq$  est une relation d'ordre total donc  $\mathcal{E}$  est une relation d'ordre total.