Devoir maison 3

Exercice 1 :
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Correction

$$A \cap B =]-2,7]$$
$$A \cup B =]-\infty, 7]$$
$$B \cap C =]-5,7]$$
$$B \cup C =]-2, +\infty[$$
$$\mathbb{R} \setminus A =]3, +\infty[$$
$$A \setminus B =]-\infty, -2]$$
$$\begin{aligned}(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) &=]3, +\infty[\cap (]-\infty, -2] \cup]7, +\infty[) = (]3, +\infty[\cap]-\infty, -2]) \cup (]3, +\infty[\cap]7, +\infty[) \\ &= \emptyset \cup]7, +\infty[=]7, +\infty[\end{aligned}$$
$$(\mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7, +\infty[$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) =]-2,7] \cup]-5,3] =]-5,7]$$
$$A \cap (B \cup C) =]-\infty, 3] \cap]-2, +\infty[=]-2,3]$$

Exercice 2 :

Justifier les énoncés suivants.
(i) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.
(ii) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.
(iii) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :
$C_E(C_E A)$; $A \cap C_E A$; $A \cup C_E A$; $C_E \emptyset$; $C_E E$

Correction
(i) Soit $x \in \overline{B} = \complement_E^B$, $x \notin B$, comme $A \subset B$, $x \notin A$, autrement dit $x \in \overline{A} = \complement_E^A$ ce qui montre que si $x \in \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$.
(ii) Si $x \in A$ alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \emptyset$) donc $x \in \overline{B} = \complement_E^B$.
Si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A} = \complement_E^A$
(iii) $C_E(C_E A) = A$, $A \cap C_E A = \emptyset$, $A \cup C_E A = E$, $C_E \emptyset = E$ et $C_E E = \emptyset$

Exercice 3 :
1°) Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2°) Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Correction
1°) $(A \setminus B) \setminus C = \left(A \cap \overline{B}\right) \setminus C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \setminus (B \cup C)$
2°)
$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(C \cap \overline{D}\right) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cap \overline{D}\right) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B \cup D}\right) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$