Université Claude Bernard Lyon 1
Licence Sciences et Technologies

Unité d' enseignement: Math I Algèbre

Contrôle continu final

13 janvier 2009 - durée 2 heures

- Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.
- Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.

Question 1 Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.
(1) On suppose qu'il existe une application $r : F \to E$ telle que $r \circ f = id_E$. Montrer qu'alors f est injective.
(2) On suppose f injective. Construire une application $r : F \to E$ telle que $r \circ f = id_E$.

Question 2 Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$.
(1) Pour quels entiers $k \in \mathbf{N}$ la classe $\overline{k} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet-elle un inverse (pour la multiplication) dans l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$? (Aucune justification n'est demandée.)
(2) Déterminer l'inverse de $\overline{13}$ (pour la multiplication) dans $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$.

Question 3
(1) Déterminer tous les couples d'entiers $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $11\,u + 7\,v = 1$.
(2) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{1000} par 7 et par 11.
(3) Déduire des deux questions qui précèdent le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 77.

Question 4
(1) Résoudre en coordonnées cartésiennes l'équation dans $\mathbf{C}$:

$$z^2 = -2 + 2\,i$$

(2) Ecrire $-2 + 2\,i$ sous forme polaire. Résoudre alors l'équation en coordonnées polaires.
(3) Déduire des deux questions qui précèdent la valeur de $cos\,\frac{3\pi}{8}$.

Question 5 On considère les groupes $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (pour l'addition). On notera $\bar{l}$ la classe de l'entier l dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ et $\hat{l}$ la classe de l'entier l dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
(1) Montrer que l'application

$$f : \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} : \bar{l} \mapsto \hat{l}$$

est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupes.
(2) Déterminer le noyau $Ker\,f$ de f et dresser sa table de composition.
(3) Construire un isomorphisme entre les groupes $Ker\,f$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.