Université Lyon 1 | Automne 2009/2010
Math I Algèbre | Seq 2 (J. Melleray)

Contrôle Continu n°2 - Correction

Exercice 1. (*3 pts.*)
On considère deux ensembles E, F, deux parties $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ et une fonction $f\colon E \to F$. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant votre réponse (on pourra bien sûr utiliser sans démonstration les théorèmes vus en cours).

(a) Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
(b) Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
(c) Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.

Correction.
(a) est vraie, c'est un théorème vu en cours.
(b) est fausse en général : par exemple, si $E = F = \mathbb{N}$ et f est la fonction constante $x \mapsto 0$, alors l'image réciproque de $\{0\}$ est $\mathbb{N}$ tout entier ; de plus $\{0\}$ est fini et $\mathbb{N}$ est infini.
(c) est fausse aussi, et le même contre-exemple que ci-dessus marche : on a $f(\mathbb{N}) = \{0\}$.

Exercice 2. (*4pts*)
On considère un ensemble E, et une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E.

(a) Rappeler les définitions des trois énoncés suivants :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive.
2. $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

(b) On suppose que $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive. Dire si le raisonnement suivant est correct, en justifiant votre réponse.
"Soit $x \in E$. On a $x\mathcal{R}y$ donc, comme $\mathcal{R}$ est symétrique, on a $y\mathcal{R}x$; comme $\mathcal{R}$ est transitive et qu'on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ on déduit que $x\mathcal{R}x$. Par conséquent $\mathcal{R}$ est réflexive."

Correction.
(a) Rappelons les définitions du cours :

1. $\forall x \in E\ x\mathcal{R}x$.
2. $\forall x, y \in E\ (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (y\mathcal{R}x)$.
3. $\forall x, y, z \in E\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

(b) Le raisonnement est incorrect : en effet, on ne sait pas qui est le y tel que $x\mathcal{R}y$, en fait on ne sait pas s'il existe un tel y. Autrement dit, si jamais il existe un x tel que $x\mathcal{R}y$ n'est vrai pour aucun y, alors on ne peut pas appliquer le raisonnement proposé ci-dessus.
Et effectivement, on peut construire un exemple de relation symétrique et transitive mais pas réflexive : par exemple, sur l'ensemble $\{0, 1\}$ on peut considérer la relation $\mathcal{R}$ telle que $0\mathcal{R}0$, et on n'ait ni $0\mathcal{R}1$ ni $1\mathcal{R}0$ ni $1\mathcal{R}1$. Cette relation est symétrique et transitive, mais pas réflexive.

Exercice 3. (*3 pts.*)
On considère un ensemble E, et trois parties A, B, C de E. On rappelle que la notation $C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E, et on définit

$$A \Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \ .$$

Démontrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Correction.
Soit $x \in A\Delta B$. Distinguons deux cas :

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$; de plus on n'a pas $x \in B \cap C_E A$, par conséquent par définition de $A\Delta B$ on a $x \in A \cap C_E B$, en particulier $x \notin B$ et donc $x \notin A \cap B$.
- Si $x \notin A$, alors $x \notin A \cap B$; on a aussi $x \notin A \cap C_E B$, par conséquent on doit avoir $x \in B \cap C_E A$ et donc $x \in B$, d'où $x \in A \cup B$.

Dans les deux cas ci-dessus, on a obtenu que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On vient donc de montrer que

$$x \in A\Delta B \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \ .$$

Il nous reste à montrer la réciproque ; soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, c'est-à-dire $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Distinguons deux cas :

- Si $x \in A$ on a $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$, et donc $x \in A \cap C_E B$.
- Si $x \notin A$ alors $x \in B$ puisque $x \in A \cup B$, et comme $x \notin A$ on a $x \in B \cap C_E A$.

Dans les deux cas, on voit que $x \in (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$. On vient d'obtenir :

$$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Rightarrow x \in A\Delta B \ .$$

Finalement, on a prouvé que

$$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A\Delta B \ .$$

On a donc démontré l'égalité $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 4. (*5 pts*)
Soit X, Y deux ensembles, et f une fonction de X dans Y.

(a) Pour $B \subseteq Y$, donner la définition de l'ensemble $f^{-1}(B)$.

(b) On considère l'application F de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$F(B) = f^{-1}(B) \ .$$

Montrer que si $B \subseteq f(X)$ a au moins deux éléments, alors $F(B)$ a au moins deux éléments.

(c) On suppose que F est surjective. Montrer qu'alors f est injective (indication : étant donné $x \in X$ on pourra commencer par montrer que si F est surjective alors on doit avoir $\{x\} = F(\{f(x)\})$.

Correction.

(a) $f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$.

(b) Soit b, b' deux éléments distincts de B (qui existent par hypothèse sur B). Alors, comme $B \subseteq f(X)$ on peut trouver $x, x' \in X$ tels que $b = f(x)$ et $b' = f(x')$. Comme $b \neq b'$ on doit avoir $x \neq x'$, de plus $f(x)$ et $f(x')$ appartiennent à B, autrement dit x et x' appartiennent à $f^{-1}(B) = F(B)$.

(c) Soit $x \in X$. Suivons l'indication : comme F est surjective, il existe une partie $B \subseteq Y$ telle que $F(B) = \{x\}$. Notons $B' = B \cap f(X)$, $B'' = B \setminus B'$. Alors on a $f^{-1}(B'') = \emptyset$, et $f^{-1}(B) = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$ par une propriété vue en cours sur l'image réciproque d'une union d'ensembles par une fonction. Par conséquent, $f^{-1}(B') = \{x\}$ et $B' \subseteq f(X)$. A cause de la question (b), on sait que B' ne peut pas avoir deux éléments ou plus ; de plus $F(B') \neq \emptyset$ donc $B' \neq \emptyset$. Finalement, B' a un unique élément ; appelons-le temporairement y. On a $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$, par conséquent $f(x) = y$ et finalement $B' = \{f(x)\}$. On vient de prouver que, si F est surjective, alors on a pour tout $x \in X$

$$\{x\} = F(\{f(x)\}) \ .$$

Soit maintenant x, x' tels que $f(x) = f(x')$. Alors l'égalité ci-dessus nous donne :

$$\{x\} = F(\{f(x)\}) = F(\{f(x')\}) = \{x'\} \ .$$

Autrement dit, on a $x = x'$ et ceci montre que f est injective.