Correction Exo 3

1°) Soit f une $\mathcal{C}^0$ bornée

$$(1) = \mathbb{E}(f(Z,W)) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} f\left(\ln(x), 1 + \frac{\ln y}{\ln x}\right)$$

$z = \ln(x)$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-z} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = e^{-z} dz$

$$(1) = \int_0^{+\infty} e^{-z} dz \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} f\left(z, 1 + \frac{\ln(y)}{z}\right)$$

$w = 1 + \frac{\ln(y)}{z}$, $y = e^{z(w-1)}$ $\quad \frac{dw}{dy} = \frac{1}{zy}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{z\,dw}{e^{z(w-1)}}$$

$$(1) = \int_0^{+\infty} dz \int_1^{+\infty} dw\, z e^{-zw} f(z,w)$$

$\Rightarrow$ (Z,W) est à densité (par rapport à Lebesgue) et sa densité est

$$g_{(Z,W)}(z,w) = z e^{-zw} \mathbb{1}_{\{z \geq 0,\, w \geq 1\}}$$

2°) On ne peut pas écrire $g_{(Z,W)}(z,w)$ sous la forme $q(z)\,r(w)$, on a pas indépendance.

3°) $\forall t \geq 1$, $P(W \geq t) = \int_t^{+\infty} dw \int_0^{+\infty} dz\, z e^{-zw}$

IPP : $h(w) = \frac{1}{w^2} \Rightarrow W \overset{\text{loi}}{=} X$ $\quad \underline{\qquad\qquad}$ $h(w)$