Cours 6. Intégrales à paramètre.

Mathématiques 4

9 mars 2026

Quelques rappels

Définition 1

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si la limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{h},$$

existe (et est finie), on l'appelle la i-ème dérivée partielle de f au point $(a_1, \cdots, a_n) \in D$ et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$.

Si pour tout $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, f admet une i-ème dérivée partielle au point $\bar{a}$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \bar{a} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$ est appelée la i-ème dérivée partielle de f (ou la dérivée partielle par rapport à la variable x_i).
Si toutes ces fonctions sont continues, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Quelques rappels

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x,y) = xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{a(b+h) - ab}{h} = a.$$

Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_i, on fixe les autres variables et on calcule la dérivée usuelle à une variable où la variable est x_i. Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante)} = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante)} = x.$$

Quelques rappels

Définition 2

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, alors on appelle gradient de f au point $\bar{a}$ le vecteur

$$\nabla f(a_1, \cdots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \cdots, a_n) \right)$$

Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a).$$

Quelques rappels

Définition 3

La dérivée partielle de f d'ordre j par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}$ est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \Big(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}} \Big).$$

Exemple 2

Considérons la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3$. Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Big) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Quelques rappels

De façon itérative, si toutes les dérivées partielles d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de f existent et sont continues sur tout D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.

Revoyez le lemme de Schwarz vue en Math 2 (si f assez régulière, on peut prendre les dérivées partielles dans n'importe quel ordre).

Définition 4

Le laplacien d'une fonction de classe C^2 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donné par

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}).$$

Composition des fonctions de plusieurs variables

Proposition 5 (Règle de la chaîne)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles et $t \mapsto (x_1(t), ..., x_n(t))$ une application dérivable. Alors, l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la composition $g(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$ est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},$$

où les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont calculées en $(x_1(t), ..., x_n(t))$ et les $\frac{dx_i}{dt}$ en t.

Attention

C'est un cas particulier de la multiplication des jacobiennes vue en Math 2.

Exercice (ai-je bien compris ?)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x, x)$. (Indication : ce n'est **pas** $2\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$.)

Intégrales dépendant d'un paramètre (I)

Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (disons $E = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Soit finalement $A \subset E$ une partie de E..

Definition

Soient $f : A \times I \to \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est absolument intégrable. Dans ce cas, on peut poser :

$$F(x) := \int_I f(x,t)\ dt\,.$$

On définit ainsi une *intégrale dépendant d'un paramètre* x la fonction $F : A \to \mathbb{C}$.

Intégrales dépendant d'un paramètre (II)

Exemple

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$
Dans ce cas on peut calculer en changeant de variable pour $x \neq 0$ ($F(0) = 1$ est clair) :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{d(xt)}{1+x^2t^2} = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}.$$

L'étude des intégrales dépendant d'un paramètre est surtout utile quand on ne peut pas calculer l'intégrale (cas de la convolution, des transformées de Fourier ou de Laplace plus tard).
On peut voir Arctan comme une fonction définie en utilisant une intégrale dépendant d'un paramètre (si on ne connaît pas la fonction tangente pour la définir comme son inverse).

Théorème de continuité avec hypothèse de domination

Théorème

Soit $f : A \times I \to \mathbb{C}$.
On suppose :

1. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$, est mesurable (par exemple continue par morceaux) sur I.
2. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue en $x_0 \in A$.
3. (Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall t \in I, \forall x \in A, \quad |f(x,t)| \leq g(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue en x_0.

On remarquera que **dans l'hypothèse de domination, la fonction g ne dépend pas du paramètre** x, seulement de la variable d'intégration t. On remplace souvent 1 et 2 par "f continue sur $A \times I$".

Transformée de Fourier

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa *transformée de Fourier* est définie par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx.$$

Par le théorème ci-dessus, elle est continue sur $\mathbb{R}$, utilisant notamment la domination

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall p \in \mathbb{R}\,, \quad |f(x)e^{-ipx}| = |f(x)||e^{-ipx}| \leq |f(x)|\,,$$

puis que f est intégrable (plus de détails aux chapitres suivants).

Théorème de convergence dominée

Le résultat suivant est le fondement de l'étude des intégrales à paramètres. On se restreint au cas de $\mathbb{R}$ mais le cas $\mathbb{R}^n$ est similaire.

Théorème

[Théorème de convergence dominée de Lebesgue TCD] Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ pour (presque) tout x. On suppose qu'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall t \in I\,, \qquad |f_n(t)| \leq g(t) \quad \text{(condition de domination)},$$

alors f est intégrable et

$$\int_I f = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n \quad \text{vaut} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$

L'hypothèse de domination est importante : voir l'exemple suivant.

Exemple

Exemple

Soit $f_n = 1_{[n,n+1[}$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$. On a $f_n(x) \to 0 = f(x)$ quand $n \to +\infty$, mais

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0 < \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1.$$

La plus petite domination g des f_n indépendante de n est donnée par $g(x) = \sup_n f_n(x) = 1_{[0,+\infty[}$ et n'est pas une domination intégrable, i.e. $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = +\infty$. Le théorème ne s'applique **pas**.

Théorème de Fubini

Dans ce résultat important, au lieu d'intervertir intégrale et dérivée, on intervertit intégrale et intégrale. Ici I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème

[Théorème de Fubini] Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. (Fubini-Tonelli) si $f \geq 0$ alors on a égalité des nombres dans $[0, +\infty]$:

$$\int_J dy \int_I f(x,y)\, dx = \int_I dx \int_J dy\, f(x,y)$$

2. (Fubini) Si $\int_J dy \int_I dx\, |f(x,y)| < +\infty$ alors

$$\int_J dy \int_I dx\, f(x,y) = \int_I dx \int_J dy\, f(x,y).$$

Dérivation selon le paramètre

Théorème

[Théorème de dérivations successives] Soit $f :]a, b[\times I \to \mathbb{R}$ avec f une fonction de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est à dire f est k fois dérivable avec toutes ses dérivées continues).
On suppose qu'il existe $\phi_0, ..., \phi_k$ intégrables sur I telles que pour $p = 0, ..., k$:

$$\forall x \in]a, b[, \forall t \in I \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)\right| \leq \phi_p(t).$$

Alors $x \mapsto F(x) := \int_I f(x, t)\ dt$ est C^k sur $]a, b[$ et pour $p \leq k$:

$$\frac{d^p F}{dx^p}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)\ dt.$$

(« la dérivée p-ème de l'intégrale par rapport au paramètre est l'intégrale de la dérivée (partielle) p-ème par rapport au paramètre »)

Exemple de la Gaussienne (I)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$

$$|e^{-t^2} \cos(tx)| \leq e^{-t^2/2} \leq g(t) = e^{1/2-t},$$

car

$$(t-1)^2 \geq 0 \iff t^2 - 2t + 1 \geq 0 \iff \frac{t^2}{2} \geq t - 1/2$$

pour $t \geq 0$; comme g est intégrable $\int_0^{+\infty} g(t)dt = e^{1/2}$, on déduit du théorème de comparaison I que $f(t,x) = e^{-t^2} \cos(tx)$ est intégrable en t sur $[0, +\infty[$ pour tout x fixé. La fonction F est donc bien définie.

Exemple de la Gaussienne (II)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
Montrer que F est continûment dérivable et exprimer $F'(x)$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + xF(x)/2 = 0$.

f est $\mathcal{C}^1$ et dominée par g indépendante de x ; il faut aussi dominer sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = -te^{-t^2} \sin(tx)$. Or $te^{-t^2/2}$ est bornée par C (continue et tend vers 0 en $\pm\infty$ ou max atteint pour $e^{-t^2/2}(1-t^2) = 0$ en $t = 1$, minimum atteint en $t = -1$, donc bornée par $C := e^{-1/2}$) donc on a la domination $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\right| = |te^{-t^2} \sin(tx)| \leq Ce^{-t^2/2} \leq Cg(t)$. Par le théorème de dérivation F est $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

Exemple de la Gaussienne (III)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + xF(x)/2 = 0$.

On intègre par parties $u(t) = e^{-t^2}$, $u'(t) = -2te^{-t^2}$, $v(t) = \sin(tx)$, $v'(t) = x\cos(tx)$, ce qui donne

$$F'(x) = \frac{1}{2}[e^{-t^2}\sin(tx)]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = 0 - \frac{x}{2}F(x).$$

Exemple de la Gaussienne (IV)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.

Montrer que la fonction G donnée par $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}} F(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ puis conclure que $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On calcule $G'(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \left(F'(x) + \frac{x}{2} F(x)\right) = 0$, puis on passe en polaire puis on pose $u = r^2$:

$$G(0)^2 = F(0)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2-s^2} dtds = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2} r$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} du e^{-u} = \frac{\pi}{4}.$$

Preuve du théorème de continuité des intégrales à paramètres

L'hypothèse de domination garantit que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable. Soit $x_n \in A$ tel que $x_n \to x_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x,t)$, pour chaque t, $f(x_n,t) \to f(x_0,t)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure $\lim_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)dt = \int_I f(x_0,t)dt$.