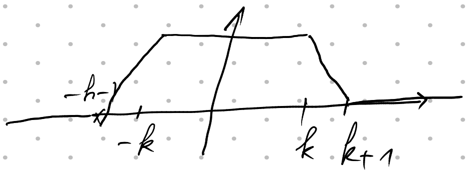
Probabilités

Lemme : Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. réelles
Soit X v.a. réelle tq

$\forall f \in C_c^0(\mathbb{R})$ (continue nulle hors d'un compact), $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\infty]{} E(f(X))$

Alors $\forall f \in C_b^0$ (bornée), $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\infty]{} E(f(X))$

démo : $\forall k \in \mathbb{N}$, Soit φ_k continue : $\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq k \\ 0 & \text{si } |x| \geq k+1 \end{cases}$



$\forall x \quad \varphi_k(x) \xrightarrow[k\infty]{} 1$

Soit $f \in C_b^0(\mathbb{R})$. $E(f(X_n)) - E(f(X))$

$$= E(f(X_n)) - E(f\varphi_k(X_n)) + E(f\varphi_k(X_n)) - E(f\varphi_k(X)) + E(f\varphi_k(X)) - E(f(X))$$

donc
$$|E(f(X_n)) - E(f(X))| \leq \|f\|_\infty E((1-\varphi_k)(X_n)) + E(f\varphi_k(X_n)) - E(f\varphi_k(X)) + \|f\|_\infty E((1-\varphi_k)(X))$$
$$\leq \|f\|_\infty (2 - E(\varphi_k(X_n)) - E(\varphi_k(X))) + E(f\varphi_k(X_n) - f\varphi_k(X))$$

$\forall k \quad \limsup |E(f(X_n)) - E(f(X))| \leq \|f\|_\infty (2 - 2E(\varphi_k(X)))$
$$\leq 2\|f\|_\infty P(|X| > k) \xrightarrow[k\infty]{} 0$$

donc $\limsup |E(f(X_n)) - E(f(X))| = 0$ donc $\lim E(f(X_n)) = E(f(X))$

Théorème central limite :
Soit (X_n) suite de v.a. indépendante de même loi L^2
$\sigma^2 = \text{var}(X_1)$
ALORS $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n - nE(X_1)) \xrightarrow[n\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma)$

démo. Cas où $E(X_1)=0$

$$Z_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}} \qquad \Phi_{Z_n}(\xi) = E(e^{i\xi Z_n})$$

$$= E\left(e^{\frac{i\xi}{\sqrt{n}}(X_1+\dots+X_n)}\right) = E\left(e^{\frac{i\xi X_1}{\sqrt{n}}}\right)^n$$

$$= \Phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^n$$

or $\Phi_{X_1}(\xi) = 1 + i\xi E(X_1) - \frac{\xi^2}{2}E(X_1^2) + o(\xi^2)$

$$= 1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + o(\xi^2)$$

$$\Rightarrow \Phi_{X_1}(\xi/\sqrt{n}) = 1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_{X_1}(\xi/\sqrt{n})^n = \left(1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} = \Phi_{N(0,\sigma)}(\xi)$$

Or $\boxed{\text{Théorème de Lévy : si } \Phi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\infty]{} \Phi_X(\xi) \quad (\forall \xi) \text{ alors } X_n \xrightarrow[\text{loi}]{} X}$

appliqué à Z_n. □

démo du théorème de Lévy.

1°/ Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

Soit $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)\,dt$.

Alors $E(f(X_n)) = E\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n}\varphi(t)\,dt\right)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,E(e^{itX_n})\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\underset{\substack{\downarrow \\ \Phi_X(t)}}{\Phi_{X_n}(t)}\,dt$$

$\xrightarrow[n\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\Phi_X(t)\,dt$ par conv. dominée.

$= E(f(X))$.

2°/ Cas général. Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Soit $p_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(\sigma > 0)$

Alors $p_\sigma * f \xrightarrow[\sigma \to 0]{} f$ uniformément sur $\mathbb{R}$

$$E(f(X_n)-f(X)) = E(f(X_n)) - E(p_\sigma * f_\cdot (X_n)) + E((p_\sigma * f)(X_n)) - E(p_\sigma * f(X))$$
$$+ E(p_\sigma * f(X)) - E(f(X))$$

Or $\left|E\left((p_\sigma * f)(X)\right) - E(f(X))\right| \leq \|p_\sigma * f - f\|_\infty$

$\left|E(p_\sigma * f(X_n)) - E(f(X_n))\right| \leq \|p_\sigma * f - f\|_\infty$

Donc $\forall \sigma > 0$, $\limsup |E(f(X_n)) - E(f(X))| \leq 2\|p_\sigma * f - f\|_\infty$

car $\forall \sigma$, $p_\sigma * f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} f(y)\,dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{p_{1/\sigma}(t) \hat{f}(-t)}_{L^1(\mathbb{R})}\,dt$$

où $\hat{f}(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ist} f(t)\,dt$

donc d'après le cas 1°/ $E(p_\sigma * f(X_n)) - E(p_\sigma * f)(X) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ $(\forall \sigma > 0)$

Donc $\forall \sigma > 0$, $\limsup |E(f(X_n)) - E(f(X))| \leq \|p_\sigma * f - f\|_\infty \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$

donc $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\infty]{} E(f(X))$ $(\forall f \in C_c^0(\mathbb{R}))$

donc $X_n \xrightarrow{\text{Loi}} X$. $\square$.

Vecteurs gaussiens

Définition Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
($\forall i$, X_i va réelle)

On dit que X vecteur gaussien si $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$,
$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour un certain $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$.

Dans ce cas on pose $\mathrm{Var}_{i,j}(X) = E(X_i - E(X_i))\; E(X_j - E(X_j))$

$$= E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j)$$

Théorème : Si X vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, alors $X_1, \dots, X_n$ sont 2à2 indépendantes
$\Leftrightarrow \mathrm{var}(X) = (\mathrm{var}_{i,j}(X))_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonale

$\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j).$

<u>démo</u> : X_i, X_j indépendantes $\Leftrightarrow \Phi_{(X_i,X_j)}(x_i, x_j) = \Phi_{X_i}(x_i)\Phi_{X_j}(x_j)$

<u>Exemple</u>

Soient X, Y v.a. réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$

Montrer $X+Y$ et $X-Y$ indépendantes

$$E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y)$$

$$= E(X^2 - Y^2) - \left(E(X)^2 - E(Y)^2\right)$$

$$= E(X^2) - E(Y^2) = 1 - 1 = 0.$$

de plus $aX + bY \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 0$. $\square$

Fin