Probabilités

1) Lemme de Borel-Cantelli

Définition. Soit $(A_n)_n$ suite d'évènements

on note $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

« une infinité de A_n a lieu »

i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, alors $P(\limsup A_n) = 0$

ii) si les A_n sont indépendants et si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ alors

$P(\limsup A_n) = 1$

---

démo i) $P(\limsup A_n) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ $(\forall n)$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

$\square$

ii) $(\limsup A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$

or $\forall n$ $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right)$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} P(A_k^c) = \lim_{N\infty} \prod_{k=n}^{N} (1-P(A_k))$$

or $\forall 0 \leq x \leq 1$, $1-x \leq e^{-x}$

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq \lim_{N\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} = \lim_{N\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)} = 0$$

donc $\forall n$ $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$ $\square$

Contre-ex. Loi uniforme

$P(U \leq t) = t$ $\forall 0 \leq t \leq 1$

$A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$ $\forall n \geq 1$.

$\forall n$ $P(A_n) = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

mais $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{U \leq \frac{1}{k}\}$

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{U \leq \frac{1}{n}\} = \{U \leq 0\}$ donc $\boxed{P(\limsup A_n) = 0}$

2) Loi des grands nombres L^2

Théorème. Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. indépendantes de même loi

ALORS $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\infty]{p.s.} E(X_1)$

[c-à-d: $P(\{\omega : \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = E(X_1)\}) = 1$]

démo. On suppose $\forall i$, $E(X_i) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, $P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \varepsilon) = P(\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 \geq \varepsilon^2)$

$$\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2} E((\sum_{k=1}^{n} X_k)^2)$$

$\boxed{P(Y \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(Y)}$ (Inégalité de Tchebychev)

or $(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{k<l} X_k X_l$

$\Rightarrow E((\sum_{k=1}^{n} X_k)^2) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = n E(X_1^2)$

car $E(X_k X_l) = \underbrace{E(X_k)E(X_l)}_{=0}$ si $k \neq l$

donc $P(\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} E(X_1^2)$

$P(\underbrace{\frac{1}{m^2}|\sum_{k=1}^{m^2} X_k| \geq \varepsilon}_{A_{m,\varepsilon}}) \leq \frac{1}{m^2\varepsilon^2} E(X_1^2)$

Comme $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$, Lemme de Borel-Cantelli $\Rightarrow P(\limsup A_{m,\varepsilon}) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $P(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{l=m}^{\infty} A_{l,\varepsilon}^c) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$ $P(\exists m \geq 1, \forall l \geq m \ \frac{1}{l^2}|\sum_{k=1}^{l^2} X_k| < \varepsilon) = 1$

$\varepsilon = \frac{1}{q}$, $q \to \infty$ $\qquad P(\forall q\ \exists m \geq 1, \forall l \geq m\ \frac{1}{l^2}|\sum_{k=1}^{l^2} X_k| < \frac{1}{q}) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m^2} X_k \xrightarrow[p.s.]{} 0$$

Soit $n \geq 1$. Soit $m = E(\sqrt{n})$ c-à-d: $m^2 \leq n < (m+1)^2 \Leftrightarrow m^2 \leq n \leq m^2 + 2m$

$P(|\frac{1}{n}\sum_{k=m^2+1}^{n} X_k| > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon^2}{n^2}(n-m^2)E(X_1^2) \leq 2\varepsilon^2 \frac{m}{n^2} E(X_1^2) \leq \frac{2\varepsilon^2}{n\sqrt{n}} E(X_1^2)$

On $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} < \infty$

Donc Borel-Cantelli $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=m^2+1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} 0$

or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m^2} X_k}_{|\cdot| \leq \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m^2} X_k \xrightarrow[p.s.]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=m^2+1}^{n} X_k}_{\xrightarrow[p.s]{} 0} \xrightarrow[p.s.]{} 0$

Exercices

1°) Soit f continue sur $[0,1]$, Trouver $\lim\limits_{n\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

2°) Soit $0 \leq p \leq 1$. Trouver $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
f continue sur $[0,1]$

Solutions

1°) Soient $(X_n)_n$ v.a. indépendants de même loi : $P(X_1 \leq t) = t \quad \forall 0 \leq t \leq 1$.

alors $\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n = E\left(f\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)\right)$

or $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{p.s} E(X_1) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \xrightarrow{\mathcal{L}} E(X_1)$

c-à-d $\lim\limits_{n\infty} E\left(f\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)\right) = E(f(E(X_1))) = \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)}$

2°) $(X_n)_n$ v.a indépendante de même loi $P(X_1 = 0) = 1-p$; $P(X_1 = 1) = p$

$\forall 0 \leq k \leq n \quad P(X_1+\dots+X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = E\left(f\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)\right) \longrightarrow E(f(E(X_1)))$

$= E(f(p))$

$= \boxed{f(p)}$.

Fin. Suite jeudi 19/3.