Probabilités

Différentes convergences

Soient X_n v.a (réelles)
Soit X v.a. $\Big\}$ $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Définitions. 1) On dit que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si

$\{\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ inclus dans une partie de probabilité 0

notation $(X_n) \xrightarrow{p.s.} X$

2) $(X_n)_n$ converge en probabilités vers X si

$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ Noté $(X_n) \xrightarrow{P} X$

3) $(X_n)_n$ converge en loi vers X si $\forall f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (continue bornée), $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\infty]{} E(f(X))$

noté $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Théorème : $(X_n) \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow (X_n) \xrightarrow{P} X \Longrightarrow (X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

<u>démo</u> <u>p.s. $\Rightarrow$ P.</u>

$(X_n)_n \xrightarrow{p.s.} X \Leftrightarrow \ldots$

$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}$

donc $P(\lim X_n \to X) = P\left(\bigcap_{k>0} \bigcup_{N\geqslant 0} \bigcap_{n \geqslant N} \{|X_n - X| < \frac{1}{k}\}\right)$

$(X_n) \xrightarrow{p.s.} X \Leftrightarrow P\left(\bigcap_{k>0} \bigcup_{N\geqslant 0} \bigcap_{n\geqslant N} \{|X_n - X| < \frac{1}{k}\}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \forall k \quad P\left(\bigcup_{N\geqslant 0} \bigcap_{n\geqslant N} \{|X_n - X| < \frac{1}{k}\}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \forall k, P\Big(\underbrace{\bigcap_{N\geqslant 0} \bigcup_{n\geqslant N} \{|X_n - X| \geqslant \frac{1}{k}\}}_{\text{intersection décroissante}}\Big) = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \lim_{N\infty} P\left(\bigcup_{n\geqslant N} \{|X_n - X| \geqslant \frac{1}{k}\}\right) = 0$

or, $0 \leqslant P(\{|X_N - X| \geqslant \frac{1}{k}\}) \leqslant P\left(\bigcup_{n\geqslant N} \{|X_n - X| \geqslant \frac{1}{k}\}\right)$

donc $\forall k$, $\lim\limits_{N\infty} P(\{|X_N - X| \geqslant \frac{1}{k}\}) = 0$ $\square$

$\underline{P. \Rightarrow \mathcal{L}.}$

Soit $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ R\in\mathbb{N}}} P(|X| > R) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ tq $P(|X| > R) < \varepsilon$.

f est uniformément continue sur $[-2R, 2R]$

donc $\exists \eta > 0$, $\forall -2R \leq x, y \leq 2R$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$|E(f(X_n)) - E(f(X))| \leqslant E(|f(X_n) - f(X)|)$$

On $|f(X_n) - f(X)| \leqslant \varepsilon$ si $|X_n|, |X| \leq 2R$ et $|X_n - X| \leq \eta$

donc $|f(X_n) - f(X)| \leqslant \chi_{\{|X| \leqslant R\}} |f(X_n) - f(X)| + \chi_{\{|X|>R\}} 2\|f\|_\infty$

$$\Rightarrow E(|f(X_n) - f(X)|) \leqslant P(|X|>R)\, 2\|f\|_\infty + (P(|X_n - X| \geqslant \eta)\, 2\|f\|_\infty + E(\chi_{|X_n - X| < \eta} |f(X_n) - f(X)|)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty(\varepsilon + \underbrace{P(|X_n - X| \geqslant \eta)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}) + \varepsilon$$

donc $\limsup E(|f(X_n) - f(X)|) \leqslant 2\|f\|_\infty \varepsilon + \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$

donc $E(f(X_n)) - E(f(X)) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

$(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}$. $\square$

Contre-exemples des réciproques.

Soient X_n v.a. indépendantes de loi $P(X_n = 1) = \frac{1}{2} = P(X_n = 0)$

X v.a indépendante des X_n de loi $P(X=1) = \frac{1}{2} = P(X=0)$

$\forall f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall n, E(f(X_n)) = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(0) = E(f(X))$

donc $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

$\forall\ 0 < \varepsilon < 1$

On, $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = P(X_n = 1, X = 0) + P(X_n = 0, X = 1)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \underset{n\infty}{\not\to} 0$$

$X_n \overset{P}{\not\to} X$.

Exercice Soient X_n v.a. indépendantes de lois :

$$P(X_n=1)=p_n \quad , \quad P(X_n=0)=1-p_n$$

$$(\forall n \quad 0\leq p_n \leq 1)$$

i) $(X_n) \xrightarrow{P} 0 \iff \lim_n p_n = 0$

ii) $(X_n) \xrightarrow{p.s.} 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converge.

Application : si $p_n = \frac{1}{n+1}$, $X_n \xrightarrow{P} 0$ et $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$

Solution du ii)

$$\{\omega : \lim X_n(\omega)=0\} = \bigcap_{k>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{\omega : |X_n(\omega)| < \tfrac{1}{k}\}$$

$$P(\lim X_n = 0) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{|X_n| < \tfrac{1}{k}\}\Big)$$

$$= P\Big(\bigcup_N \bigcap_{n\geq N} \{X_n = 0\}\Big)$$

si $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge

$$P(\lim X_n \neq 0) = P\Big(\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \{X_n = 1\}\Big)$$

$$= \lim_{N\infty} \underbrace{P\Big(\bigcup_{n\geq N} \{X_n=1\}\Big)}_{\leq \sum_{n\geq N} P(X_n=1)}$$

$$\leq \lim_{N\infty} \sum_{n\geq N} p_n = 0$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{p.s.} X$$

si $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$

Alors $P(\lim X_n = 0) = 0$

En effet $P(\lim X_n = 0) = P\Big(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{X_n = 0\}\Big)$

$$\bigcup_{N=0}^{p} \bigcap_{n\geq N} \{X_n = 0\} = \bigcap_{n\geq p} \{X_n = 0\}$$

or $P\Big(\bigcap_{n\geq p} \{X_n=0\}\Big) = \lim_{q\infty} P\Big(\bigcap_{n=p}^{q} \{X_n = 0\}\Big) = \lim_{q\infty} \prod_{n=p}^{q} (1-p_n)$

$$\leq \lim_{q\infty} e^{-\sum_{n=p}^{q} p_n} = 0$$

$\forall x\geq 0,\ 1-x \leq e^{-x}$

donc $\forall p \quad P\left(\bigcup_{N=0}^{p} \bigcap_{n \geq N} \{X_n = 0\}\right) = 0$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \{X_n = 0\}\right) = 0$$

donc $P(\lim X_n = 0) = 0 \neq 1 \Rightarrow (X_n) \overset{p.s.}{\not\to} 0$

conclusion $\quad X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \iff \sum_{n \geq 1}^{\infty} p_n$ converge $\square$.

Définition. Si X va réelle, on note $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $t \mapsto P(X \leq t)$

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

la fonction de répartition de X.

Rem: $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F_X(t) = F_X(t_0)$

$\square$

suite jeudi prochain.