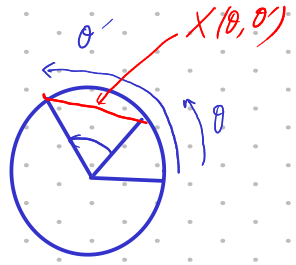
Probabilités

« Calcul d'une loi »

Soit $\Omega = [0,2\pi[^2$, $\quad P(d\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\, d\theta\, d\theta'$



$\forall\ (\theta,\theta') \in \Omega, \quad X(\theta,\theta') = 2\left|\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|$

$\in [0,2]$

Calculons la loi de X sur $[0,2]$.

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. $\quad E(f(X)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(2\left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right|\right) \frac{d\theta\, d\theta'}{4\pi^2}$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f\left(2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right) dt\right)\frac{d\theta'}{4\pi^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(|2\sin u|)\, du \qquad u = \frac{t}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(2\sin u)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2} \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2/4}}\, dy \qquad y = 2\sin u, \quad dy = 2\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\, du$$

$$= \int_0^{2\pi} f(y)\, \frac{1\, dy}{\pi\sqrt{1-y^2/4}}.$$

d'où $\quad P_X(dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2/4}}$

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité

Définition Les événements $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sont indépendants si

$$\forall\ I \subset \{1,\dots,n\}, \quad P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

Ex (et contre-ex)

« 2 lancers de pièce » $\quad A = \{$pile au 1er lancer$\}$, $B = \{$pile au 2e lancer$\}$

$C = \{$même résultat aux 2 lancers$\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(A \cap C)$

donc A, B indépendants, A, C indépendants, B, C indépendants

mais A, B, C ne sont pas indépendants car

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Définition. Soient $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires

On dit que $X_1, \dots, X_n$ indépendantes si $\forall f_1, \dots, f_n$ fonctions positives,

$$E(f_1(X_1) \dots f_n(X_n)) = E(f_1(X_1)) \dots E(f_n(X_n)).$$

(c-à-d $P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$)

Proposition. Si X, Y v.a. indépendantes, alors $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

démo: $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\mathrm{var}(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 - E(Y)^2 + \underbrace{2E(XY) - 2E(X)E(Y)}_{0}$$

$\square$

Application

« Loi des grands nombres L^2 »

Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. indépendantes de même loi tq $E(X_1^2) < \infty$ alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{L^2} E(X_1)$$

c-à-d : $E\left(\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right)^2\right) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

démo. $\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right)^2 = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n^2} + \frac{2\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2} + E(X_1)^2 - \frac{2}{n}E(X_1)(X_1 + \dots + X_n)$

$$E\left(\quad\right) = \frac{E(X_1^2) + \dots + E(X_n^2)}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} E(X_i)E(X_j) + E(X_1)^2 - 2E(X_1)^2$$

$$= \frac{E(X_1^2)}{n} + \underbrace{\frac{2}{n^2}\sum_{i<j} E(X_1)^2}_{} - E(X_1)^2$$

$$= \underbrace{\frac{E(X_1^2)}{n}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2} \underbrace{E(X_1)^2}_{E(X_1)^2} - E(X_1)^2}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

$\square$

Proposition Soit $(X_n)_n$ v.a. indépendante de même loi tq $E(X_1^4) < \infty$

Alors $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.p.} E(X_1)$

démo. Supposons $E(X_1) = 0$.

$$\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)^4 = \frac{1}{n^4}\Big(X_1^4 + \dots + X_n^4 + 6\sum_{i<j} 2X_i^2X_j^2 + 4\sum_{i\neq j} X_i^3X_j$$
$$+ 12 \underbrace{\sum_{i\neq j\neq k}}_{*} X_i^2X_jX_k + 24 \sum_{\substack{1\le i,j,k,l\le n \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} X_iX_jX_kX_l\Big)$$

$$E\left(\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)^4\right) = \frac{1}{n^4}\Big(nE(X_1^4) + 6n(n-1)E(X_1^2)^2 + 4\sum_{i\neq j} E(X_i^3)\underbrace{E(X_j)}_{=0} + 0 + 0\Big)$$
$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)^4\right) < \infty$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)^4 < \infty$ p.p.

donc p.p $\left(\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc p.p. $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\square$

Définition Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

La fonction de répartition de X est $F_X(t) = P(X \leq t)$
$= P(X^{-1}(]-\infty, t]))$

ex $X : [0, 2\pi[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\theta, \theta') \mapsto 2\left|\sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right)\right|$

$$F_X(t) = E(f(X)) \quad \text{où } f = \mathbb{1}_{]-\infty, t]}$$
$$= \int_0^2 \frac{f(x)}{\pi\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}\, dx$$
$$= \int_0^t \frac{dx}{\pi\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \quad \text{si } 0 \leq t \leq 2$$

$\square$

Fin