Géométrie

Birapport

K corps commutatif

$\mathbb{P}^1(K) = \{ [x:y] \mid (x,y) \in K^2 \setminus (0,0) \}$

où $[x:y] = [x':y']$ si $\exists t \in K \setminus \{0\}$, $(x',y') = (tx, ty)$

$\mathbb{P}^1(K) \xleftrightarrow{\text{bijection}} K \cup \{\infty\}$

$[x:1] \longleftarrow\!\shortmid x \in K$

$[1:0] \longleftarrow\!\shortmid \infty$

Définition. Soit D droite projective
Soient $x, y, z, w \in D$ 2 à 2 $\neq$

ALORS $\exists!\ h : D \to \mathbb{P}^1(K)$ homographie, $h(x) = \infty$, $h(y) = 0$, $h(z) = 1$

on note $[x, y, z; w] = h(w) \in \mathbb{P}^1(K)$

Remarque : x, y, z, w distincts $\Rightarrow h(w) \in \mathbb{P}^1(K) \setminus \{\infty, 0, 1\} = K \setminus \{0, 1\}$

<u>Rappel</u> : $D = \mathbb{P}(V)$ où $\dim V = 2$
$h : D \to \mathbb{P}^1(K)$ homographie signifie que
il existe $H : V \to K^2$ isomorphisme linéaire tq :
$\forall v \in V \setminus \{0\}$, $h([v]) = [H(v)]$.

démo de l'unicité. Suppose $D = \mathbb{P}^1(K)$, $h : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$

$$[x:y] \longmapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

Si $h(0) = 0$
$h(\infty) = \infty$
et $h(1) = 1$

alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $(1,0) \longmapsto (a, 0)$
$(0,1) \longmapsto (0, d)$

donc $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $h(1) = 1 \Rightarrow a = d$.

donc $h([x:y]) = [ax : ay] = [x:y]$.

existence :

$$\boxed{h(\alpha) = \frac{\dfrac{\alpha - y}{\alpha - x}}{\dfrac{z - y}{z - x}}}$$

$h : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$
$x \longmapsto \infty$
$y \longmapsto 0$
$z \longmapsto 1$

Propriétés :

1) Si $f : D \longrightarrow D'$ homographie avec D, D' droites projectives, alors $\forall x, y, z, w \in D$ distincts,

$$[f(x) : f(y) : f(z) : f(w)] = [x : y : z : w]$$

2) $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{P}^1(K)$ 2 à 2 $\neq$,

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = [x_2 : x_1 : x_4 : x_3] = [x_3 : x_4 : x_1 : x_2] = [x_4 : x_3 : x_2 : x_1]$$

$$[x_2 : x_1 : x_3 : x_4] = \frac{1}{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]}, \quad [x_1 : x_3 : x_2 : x_4] = 1 - [x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$$

$$[x_1 : x_2 : x_4 : x_3] = [x_1 : x_2 : x_3 : x_4].$$

Angles

a) Angles non orientés.

Si $u, v \in E \setminus \{0\}$ espace euclidien, alors

$$\langle u, v \rangle = \cos\theta \, \|u\| \, \|v\|$$

pour un seul $0 \leq \theta \leq \pi$.

b) Angles orientés.

Soit E plan euclidien

Proposition : $\forall\, 0 \neq u, 0 \neq v \in E$, si $\|u\| = \|v\|$, alors $\exists !\, R \in SO(E)$,

$$R(u) = v$$

définition Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$ espace euclidien

$$\exists !\, R_\theta \in SO(E), \quad R_\theta\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$$

$$\text{où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

on note $\theta := \widehat{u, v} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Propriétés : 1) $\forall u \neq 0$, $(\widehat{u, u}) = 0$ (mod 2π)

2) $\forall u \neq 0$, $(\widehat{u, -u}) = \pi$

3) $\widehat{u,v} = -\widehat{v,u}$

4) $\forall u,v,w \in E\setminus\{0\}$, $\widehat{\langle u,v\rangle} + \widehat{\langle v,w\rangle} = \widehat{\langle u,w\rangle}$.

5) $\forall f \in SO(E)$, $\forall u,v \in E\setminus\{0\}$, $\widehat{(f(u),f(v))} = \widehat{(u,v)}$

6) $\forall f \in O(E)\setminus SO(E)$, $\forall u,v \in E\setminus\{0\}$,

$$\widehat{(f(u),f(v))} = -\widehat{(u,v)}.$$

démo (unicité)

$$\|u\| = \|v\| = 1$$

Soit (u_1, u_2) base orthonormée de E.

Supposons $u_1 = u$.

$v = \alpha u_1 + \beta u_2$ avec $\alpha^2+\beta^2 = 1$

donc $\underset{(u_1,u_2)}{\mathrm{Mat}} R = \begin{pmatrix} \alpha & ? \\ \beta & ? \end{pmatrix}$

Une seule façon de compléter la colonne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ en une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$

démo des propriété :

4) Si $R_\theta(u) = v$ si $R_{\theta'}(v) = w$, alors

$$R_{\theta'} \circ R_\theta (u) = w$$

On a $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$, $R_\theta \circ R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$

6) Si $Ru = v$

Si $f \in O(E)\setminus E$, alors

$$fRf^{-1} : f(u) \mapsto f(v).$$

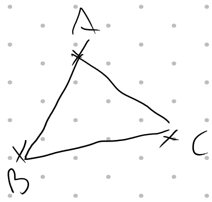
si $R = R_\theta$, $\underbrace{fR_\theta f^{-1} = R_\theta^{-1}}_{\Updownarrow} = R_{-\theta}$

$$\underbrace{fR_\theta}_{\in O(E)\setminus SO(E)} fR_\theta = Id_E$$

(car $\forall g \in O(E)\setminus SO(E)$, $g^2 = 1$)

Proposition : Si A, B, C 3 points distincts alors

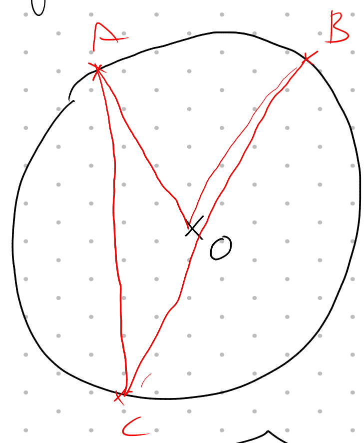
$$(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) + (\widehat{\vec{BC},\vec{BA}}) + (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = \pi$$



démo $\alpha = (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) + \underbrace{\underbrace{(\widehat{\vec{BC},\vec{BA}})}_{-(\widehat{\vec{BA},\vec{BC}})}}_{\pi - (\widehat{\vec{AB},\vec{BC}})} + (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$

$$\begin{aligned}
\alpha &= (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) + \cancel{\pi} + (\widehat{\vec{AB},\vec{CB}}) - \cancel{\pi} + (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) \\
&= (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) - (\widehat{\vec{CB},\vec{AB}}) + (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) \\
&= (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) - \pi + (\widehat{\vec{BC},\vec{AB}}) + (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) \\
&= (\widehat{\vec{BC},\vec{AC}}) - \pi + \underbrace{\pi - (\widehat{\vec{AC},\vec{CB}})}_{(\widehat{\vec{AC},\vec{BC}})} \\
&= (\widehat{\vec{BC},\vec{BC}}) - \pi = -\pi \quad [2\pi].
\end{aligned}$$

Théorème de l'angle inscrit



$\mathcal{C}$ cercle de centre O

$A, B, C \in \mathcal{C}$ distincts

Alors $\widehat{\vec{OA},\vec{OB}} = 2\,\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}$.

démo : Dans le triangle (OCA) :

$$\begin{aligned}
\pi &= (\widehat{\vec{OC},\vec{OA}}) + (\widehat{\vec{CA},\vec{CO}}) + (\widehat{\vec{AO},\vec{AC}}) \quad \Big\downarrow S_\Delta \\
&= (\widehat{\vec{OC},\vec{OA}}) + (\widehat{\vec{CA},\vec{CO}}) - (\widehat{\vec{CO},\vec{CA}}) \\
&= (\widehat{\vec{OC},\vec{OA}}) + 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CO}}) \\
&= (\widehat{\vec{OC},\vec{OB}}) + 2(\widehat{\vec{CB},\vec{CO}})
\end{aligned}$$

(de même)

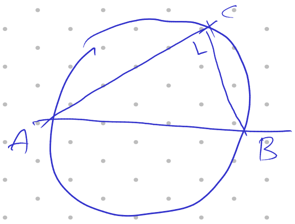
Soit Δ médiatrice de $[A,C]$.

$S_\Delta : A \mapsto C$
$C \mapsto A$
$O \mapsto O$

(différence) $0 = \widehat{(\vec{OC},\vec{OA})} - (\widehat{\vec{OC},\vec{OB}}) + 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CO}}) - 2(\widehat{\vec{CB},\vec{CO}})$

$$= (\widehat{\vec{OB},\vec{OA}}) + 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$$

$$\longrightarrow \quad (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$$



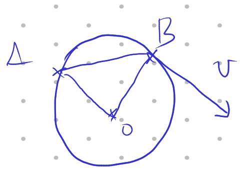
Réciproque si $2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB})$

alors A, B, C, D sont cocycliques (ou alignés)

démo: Indication:

$$(\vec{OA},\vec{OB}) = 2(\vec{AB},\vec{v})$$

$\forall\ A, B \in \mathcal{C}$ cercle de centre O, $\vec{v}$ vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en B



Pause 5'

Remarque L'angle dépend d'une base orthonormée fixée.