Dualité dans le plan projectif

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x:y:z] \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}\}$

où $[x:y:z] = [x':y':z'] \iff (x,y,z), (x',y',z')$ colinéaires.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x:y:1] \mid x,y \in \mathbb{R}\} \sqcup \underbrace{\{[x:y:0] \mid x,y \in \mathbb{R}\}}_{D_\infty}$

$\{[x:y:1] \mid x,y \in \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

<u>Notations</u> si $P = [a_0:a_1:a_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on note $P^\perp = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0x + a_1y + a_2z = 0\}$ droite dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

si $d \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ droite projective

$d = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0x + a_1y + a_2z = 0\}$, on note $d^\perp = [a_0:a_1:a_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ point dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$

Proposition $\{\text{points de } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\} \longleftrightarrow \{\text{droites projectives dans } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\}$

$$P \longmapsto P^\perp$$
$$d^\perp \longleftarrow d$$

sont deux bijections réciproques

(*) de plus $\forall P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\forall d \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ droite projective,

$$P \in d \iff d^\perp \in P^\perp$$

si $A, B, C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, alors A, B, C alignés $\iff A^\perp, B^\perp, C^\perp$ concourantes

<u>démo</u>: (*) soit $P = [x_0:y_0:z_0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

soit $d = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid ax + by + cz = 0\}$

$P \in d \iff ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \iff d^\perp \in P^\perp$

$d^\perp \in P^\perp \iff [a:b:c] \in P^\perp \iff x_0a + y_0b + z_0c = 0$.

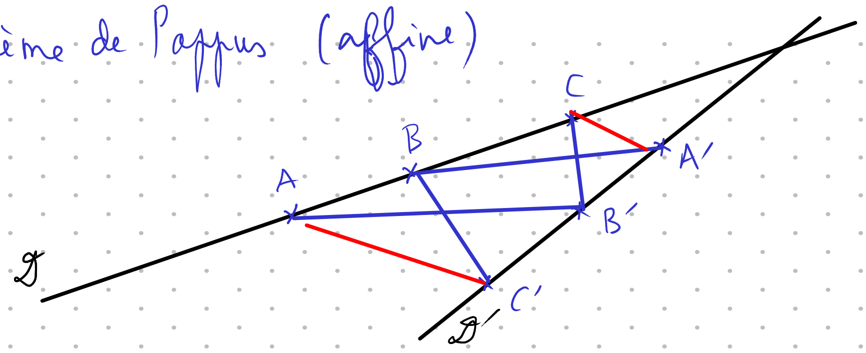
Remarque (cas affine $z=1$) (d) : $ax + by + c = 0$

(d') : $a'x + b'y + c' = 0$

(d'') : $a''x + b''y + c'' = 0$

$(d), (d'), (d'')$ concourantes ou parallèles 2 à 2 $\iff \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$

Théorème de Pappus (affine)



A, B, C alignés,

A', B', C' alignés, $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$ Si $(AB') /\!/ (A'B)$ et si $(BC') /\!/ (B'C)$

ALORS $(AC') /\!/ (A'C)$.

VERSION PROJECTIVE

Soient $A, B, C \in P^2(\mathbb{R})$ alignés

$A', B', C' \in P^2(\mathbb{R})$ alignés

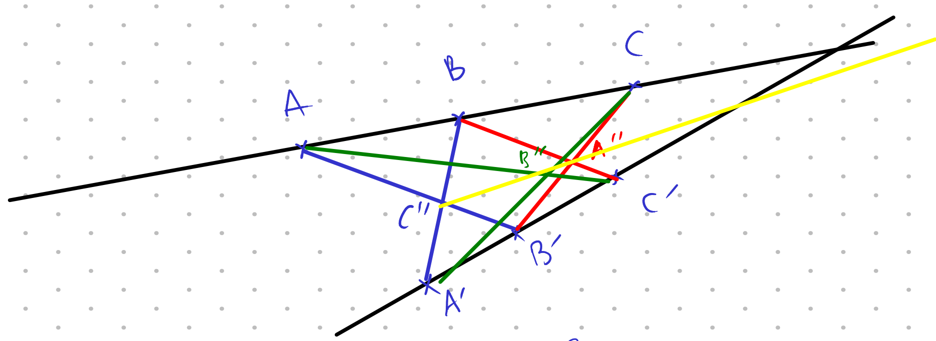
2 à 2 $\neq$ et non tous alignés

Soient $A'' = (BC') \cap (B'C) \in P^2(\mathbb{R})$

$B'' = (AC') \cap (A'C) \in P^2(\mathbb{R})$

$C'' = (AB') \cap (A'B) \in P^2(\mathbb{R})$

Alors A'', B'', C'' alignés



démo Soit $g : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ homographie

$d := (A''C'')$ $[x:y:z] \mapsto [G(x,y,z)]$ où $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iso linéaire

tq $g(d) = D_\infty = (z=0)$

Alors $g : P^2(\mathbb{R}) \setminus d \to P^2(\mathbb{R}) \setminus D_\infty = \mathbb{R}^2$

on peut supposer $d = D_\infty$.

c-à-d: $A'', C'' \in D_\infty$ c-à-d $(BC') /\!/ (B'C)$

$(AB') /\!/ (BA')$

Alors $(AC') /\!/ (A'C)$ c-à-d: $B'' \in D_\infty$

c-à-d: A'', B'', C'' alignés (sur D_∞)

Version duale du théorème de Pappus projectif

Théorème (Brianchon) : Soient α, β, γ 3 droites concourantes 2 à 2 ≠

Soient α', β', γ' 3 droites concourantes 2 à 2 ≠

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ non concourantes

Notons $A_1 = \beta \cap \gamma'$, $A_2 = \beta' \cap \gamma$

$B_1 = \alpha \cap \gamma'$, $B_2 = \alpha' \cap \gamma$

$C_1 = \alpha \cap \beta'$ $C_2 = \alpha' \cap \beta$

ALORS Les droites (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2) sont concourantes.

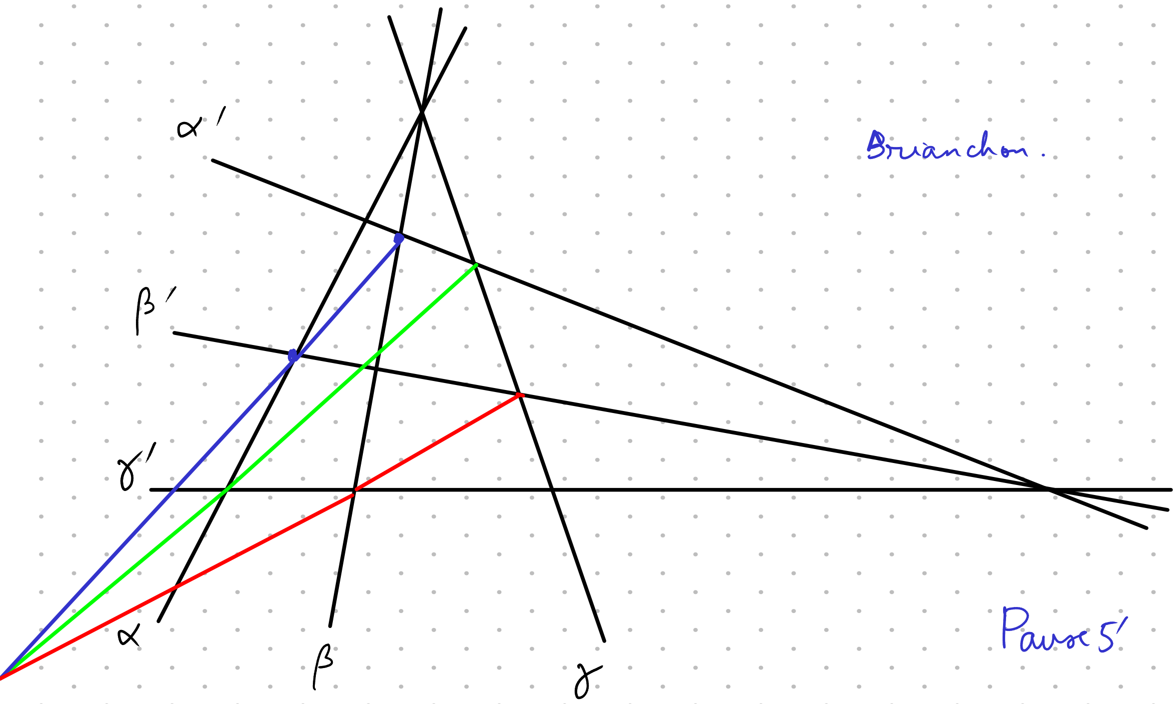
démo : on pose $A = \alpha^{\perp}$, $B = \beta^{\perp}$, $C = \gamma^{\perp}$ $\in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$A' = \alpha'^{\perp}$, $B' = \beta'^{\perp}$, $C' = \gamma'^{\perp}$ $\in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

α, β, γ concourantes $\Leftrightarrow$ A, B, C alignés.

de même A', B', C' alignés

$$\left.\begin{array}{l} A_1^{\perp} \cap A_2^{\perp} = (A_1A_2)^{\perp} = (BC') \cap (B'C) \\ (B_1B_2)^{\perp} = (AC') \cap (A'C) \\ (C_1C_2)^{\perp} = (AB') \cap (A'B) \end{array}\right\}$$ alignés $\Leftrightarrow$ (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2) concourantes □



Brianchon.

Pause 5'