Géométrie

Espaces projectifs

Définition Soit E un K-espace vectoriel

On note $\mathbb{P}(E) = \{ d \leqslant E \ ; \ d$ droite vectorielle (c-à-d $\dim d = 1$) $\}$

$= E\setminus\{0\} / \sim$ (définition équivalente)

si $0 \neq x, y \neq 0$, $x, y \in E$, on note $x \sim y$ si $\exists \lambda \in K^*$, $y = \lambda x$

Notations : a) $\forall\, 0 \neq x \in E$, $[x] =$ classe d'$\sim$ de x $= K^* x$ (identifié avec Kx)

Remarque : si $x, y \neq 0$, $[x] = [y] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*$, $y = \lambda x$.

b) $\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1}) = K^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$

$\forall\ (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, $[x_0 : \dots : x_n] = [(x_0, \dots, x_n)]$

$[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*$, $\forall i\ y_i = \lambda x_i$

Si $\dim E = 2$, $\mathbb{P}(E)$ est une « droite projective »

Si $\dim E = 3$, $\mathbb{P}(E)$ est un « plan projectif »

Ex : $\mathbb{P}^1(K) = \{ [x : y] \mid x, y \in K,\ x \text{ ou } y \neq 0 \}$

$= \{ [x : y] \mid y \neq 0 \} \sqcup \{ [x : 0] \mid x \neq 0 \}$

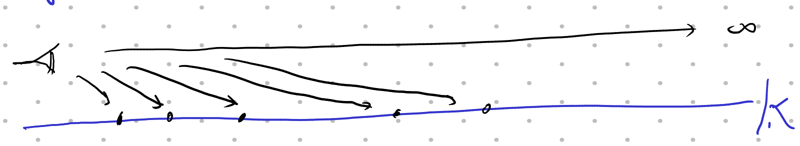
$= \left\{ \left[\frac{x}{y} : 1\right] \,\middle|\, \begin{smallmatrix} x \in K \\ y \in K^* \end{smallmatrix} \right\} \sqcup \{ [1 : 0] \}$

$= \underbrace{\{ [t : 1] \mid t \in K \}}_{\text{droite affine}} \sqcup \underbrace{\{ [1 : 0] \}}_{\text{point à l'}\infty}.$

$$\mathbb{P}^1(K) \xleftrightarrow{1:1} K \sqcup \{\infty\}$$

$$[x : y] \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \infty & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } t \in K & [t : 1] \\ \text{si } t = \infty & [1 : 0] \end{cases} \longleftarrow\!\!\mid t$$



Proposition 1) $\forall\ [x_1] \neq [x_2] \in \mathbb{P}^2(K)$

$\exists !$ droite projective $\mathbb{P}(d)$, $[x_1],[x_2] \in \mathbb{P}(d)$

$d \leqslant K^3$, $\dim d = 2$

(où $\underset{\overset{\parallel}{\mathbb{P}(K^3)}}{\mathbb{P}(d)} = \{[x] \in \mathbb{P}^2(K) : x \in d \setminus \{0\}\}$)

2) $\forall\ \mathbb{P}(d_1) \neq \mathbb{P}(d_2)$ droites projectives

$\exists !\ [x] \in \mathbb{P}(d_1) \cap \mathbb{P}(d_2)$

démo 1) $x_1, x_2 \in K^3$ non proportionnels ($[x_1] \neq [x_2]$)

on prend $d = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$.

2) Soient $d_1, d_2 \leqslant K^3$ tq $\dim d_1 = \dim d_2 = 2$

alors $\dim(d_1 \cap d_2) \underset{\text{(Grassmann)}}{=} \underbrace{\dim d_1}_{2} + \underbrace{\dim d_2}_{2} - \underbrace{\dim(d_1+d_2)}_{3} \boxed{= 1}$

$\mathbb{P}(d_1) \neq \mathbb{P}(d_2) \Rightarrow \underset{K^3 \supset}{d_1+d_2} \underset{\neq}{\supseteq} \underset{2}{d_1} \Rightarrow d_1+d_2 = K^3$

on prend $x \in K^3 \setminus \{0\}$ tq $Kx = d_1 \cap d_2$.

Remarque : si K fini de cardinal q, alors $|\mathbb{P}^n(K)| = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ ← $K^{n+1} \setminus \{0\}$; $q-1$ ← K^*

$= q^n + q^{n-1} + \dots + 1$

car $\mathbb{P}^n(K) = \left\{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \,\middle|\, \begin{matrix} x_0, \dots, x_n \in K \\ x_0, \dots, \text{ou } x_n \neq 0 \end{matrix} \right\}$

$= \underbrace{\{[x_0 : \dots : 1] \mid x_0, \dots, x_{n-1} \in K\}}_{K^n} \sqcup \underbrace{\{[x_0 : \dots : 1 : 0] \mid x_0, \dots, x_{n-2} \in K\}}_{K^{n-1}} \sqcup \dots \sqcup \{[1 : 0 : \dots : 0]\}$

$= K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$

$\mathbb{P}^{n-1}(K) = \mathbb{P}(K^n \times \{0\})$

Définition : Une *homographie* est une application $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{[f]} \mathbb{P}(E)$

$[x] \longmapsto [f(x)]$

où $f : E \to E$ isomorphisme linéaire

Proposition $GL(E) \longrightarrow \{\text{homographies}\}$ surjective de noyau $K^* Id_E$

$f \longmapsto [f]$

Notation $PGL(E) = GL(E) / K^* Id_E$.

démo : si $f : E \to E$ linéaire (iso).

si $\forall x \neq 0, [f(x)] = [x]$, alors $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists \lambda_x \in K^*, f(x) = \lambda_x \cdot x$

Alors $\begin{array}{l} E\setminus\{0\} \to K^* \\ x \longmapsto \lambda_x \end{array}$ est constante

(si x, y K linéairement indépendants,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$$

$$\underset{x,y \text{ indépendants}}{\Longrightarrow} \lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y \quad).$$

<u>Proposition</u> $PGL_2(K) = PGL(K^2)$ agit 3-simplement transitivement sur $\mathbb{P}^1(K) = \mathbb{P}(K^2)$

c-à-d: $\forall\ \underset{\neq [x_3] \neq}{[x_1] \neq [x_2]}$, $\forall\ \underset{\neq [x'_3] \neq}{[x'_1] \neq [x'_2]}$, $\exists!\ [g] \in PGL_2(K)$,

$$\forall i \quad [g]([x_i]) = [x'_i] \quad (= [g(x_i)]) \,.$$

démo.

(existence) (x_1, x_2) base de K^2

donc $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

$[x_3] \neq [x_1], [x_2] \Rightarrow \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$

de même (x'_1, x'_2) base de K^2 et $x'_3 = \alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2$ avec $\alpha'_i \in K\setminus\{0\}$

on pose $g(x_1) = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} x'_1$, $g(x_2) = \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} x'_2$

alors $g : K^2 \to K^2$ isomorphisme linéaire

et $g(x_3) \underset{(\text{linéarité})}{=} g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2)$

$= \alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 = x'_3$.

Alors $[g]$ convient.

(unicité) Si $[g_1]$ et $[g_2]$ conviennent, alors $[g_2^{-1} \circ g_1]([x_1]) = [x_1]$

$[g_2^{-1} \circ g_1]([x_2]) = [x_2]$

$[g_2^{-1} \circ g_1]([x_3]) = [x_3]$

donc $h = g_2^{-1} \circ g_1$ vérifie

$h(x_1) = \lambda_1 x_1$, $h(x_2) = \lambda_2 x_2$, $h(x_3) = \lambda_3 x_3$ $(\lambda_i \in K^*)$

$h(x_3) = h(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \lambda_2 \alpha_2 x_2 = \lambda_3 \alpha_1 x_1 + \lambda_3 \alpha_2 x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 = \lambda_3 \alpha_1 \\ \lambda_2 \alpha_2 = \lambda_3 \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

donc $h \in K^* I_2 \Rightarrow [g_2] = [g_1]$.

Ex: $[x_1] = [1,0]$ ∞

$[x_2] = [0:1]$ 0

$[x_3] = [1:1]$ 1

Lien entre le plan affine et le plan projectif.

Notation : Si $d \subset K^2$ droite affine, $d = (ax+by+c=0)$
$a,b,c \in K$, $(a,b) \neq (0,0)$

on note $\bar{d} = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(K) \mid ax+by+cz=0\}$

(droite projective $= \mathbb{P}(\Delta)$ où $\Delta = \{(x,y,z) \in K^3 ; ax+by+cz=0\}$)

on note $D_\infty = \{[x:y:0] \mid (x,y) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}\} = \{(z=0)\} = \mathbb{P}(K^2 \times \{0\})$

« droite à l'∞ »

Proposition. Soient $d_1 \neq d_2$ deux droites affines dans K^2

Alors $\underset{\text{parallèle}}{d_1 /\!/ d_2} \iff \bar{d_1} \cap \bar{d_2} \in D_\infty$

Remarque : $d_1 \neq d_2$ comme droites affines dans $K^2 \iff \bar{d_1} \neq \bar{d_2}$ comme droites projectives dans $\mathbb{P}^2(K)$.

démo : $d_1 = (a_1x + b_1y + c_1 = 0)$, $d_2 = (a_2x + b_2y + c_2 = 0)$

$d_1 \neq d_2 \iff (a_1, b_1, c_1)$ non colinéaire à (a_2, b_2, c_2).

$\iff l_1(x,y,z) = a_1x + b_1y + c_1z$ non colinéaire à $l_2(x,y,z) = a_2x + b_2y + c_2z$ dans $(K^3)^*$

$\iff \bar{d_1} = \operatorname{Ker} l_1 \neq \operatorname{Ker} l_2 = \bar{d_2}$.

$$\bar{d_1} \cap \bar{d_2} = \left\{\left[\underset{X}{\begin{vmatrix} -c_1 & a_1 \\ -c_2 & a_2 \end{vmatrix}} : \underset{Y}{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}} : \underset{Z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right]\right\} \quad \text{(exo)}$$

$(X,Y,Z) \in \operatorname{Ker} l_1 \cap \operatorname{Ker} l_2$

donc $\bar{d_1} \cap \bar{d_2} \in D_\infty \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff d_1 /\!/ d_2$.

Pause 5'