Géométrie

Rappel si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ K-espace affine
si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tq $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$

$\exists!\, G \in \mathcal{E},\ \lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

on note $G = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

[remarque : si $O \in \mathcal{E}$, $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}$]

1) alignement

Proposition. Soient A, B, C affinement indépendants

Soient $M = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $M' = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$, $M'' = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$

avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \neq \alpha' + \beta' + \gamma'$, $0 \neq \alpha'' + \beta'' + \gamma''$

ALORS M, M', M'' alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$ □

démo. $\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AM} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$

Supposons $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 1$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} \\ \text{de même } \overrightarrow{AM'} &= \beta' \overrightarrow{AB} + \gamma' \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AM''} &= \beta'' \overrightarrow{AB} + \gamma'' \overrightarrow{AC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM} \\ &= (\beta' - \beta)\overrightarrow{AB} + (\gamma' - \gamma)\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MM''} &= (\beta'' - \beta)\overrightarrow{AB} + (\gamma'' - \gamma)\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

M, M', M'' alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta' - \beta & \gamma' - \gamma \\ \beta'' - \beta & \gamma'' - \gamma \end{vmatrix} = 0$

or $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \beta' & \gamma' \\ 1 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' - \beta & \gamma' - \gamma \\ 0 & \beta'' - \beta & \gamma'' - \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta' - \beta & \gamma' - \gamma \\ \beta'' - \beta & \gamma'' - \gamma \end{vmatrix}$

M, M', M'' alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$ □

exo a) Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$

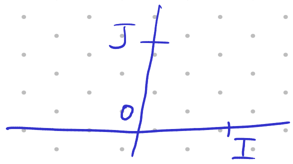
$M \in (AB) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0$

b) cas particulier $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Équation de (AB) : $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&x\\2&4&y\end{vmatrix}=0 \iff x(-2)+2y-2=0$

$\iff \boxed{y-x-1=0}$

Solution du a)



$A=\text{Bar}\begin{pmatrix}O & I & J\\ x_A+y_A-1 & x_A & y_A\end{pmatrix}$

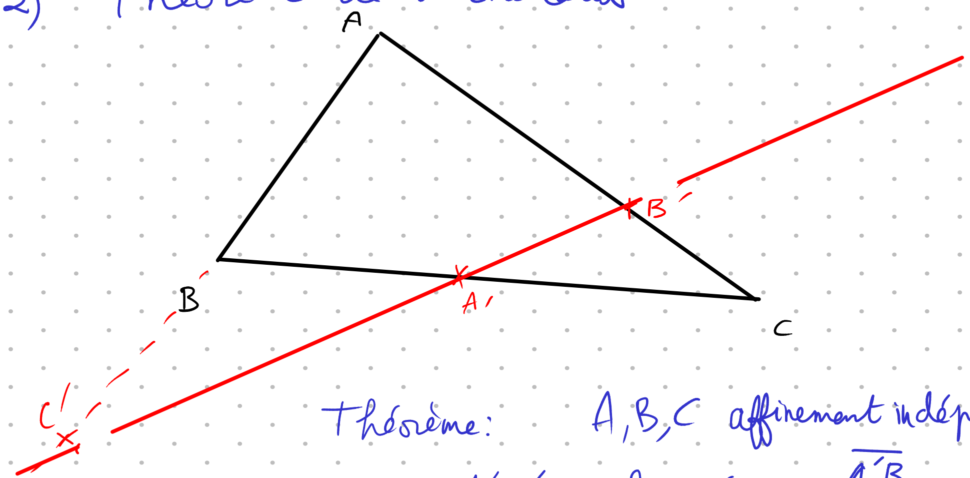
car $\vec{OA}=x_A\vec{OI}+y_A\vec{OJ}$

$\iff (1-x_A-y_A)\vec{OA}=x_A\vec{AI}+y_A\vec{AJ}$

$\iff A \text{ bar}\begin{pmatrix}O & I & J\\ x_A+y_A-1 & x_A & y_A\end{pmatrix}$

donc A,B,M alignés $\iff \begin{vmatrix}x_A+y_A-1 & x_A & y_A\\ x_B+y_B-1 & x_B & y_B\\ x+y-1 & x & y\end{vmatrix}=0 \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{\iff} \begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x & y\end{vmatrix}=0$

2) Théorème de Ménélaüs



Théorème : A,B,C affinement indépendants, $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$

A',B',C' alignés $\iff \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1$

rappel si X,Y,Z alignés on note $\lambda=\dfrac{\overline{XY}}{\overline{XZ}}$ si $\vec{XY}=\lambda\vec{XZ}$

démo. Posons $\alpha=\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ alors $\vec{A'B}=\alpha\vec{A'C} \iff A'=\text{bar}\begin{pmatrix}B & C\\ 1 & -\alpha\end{pmatrix}$

$\beta=\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ alors $B'=\text{bar}\begin{pmatrix}C & A\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}$

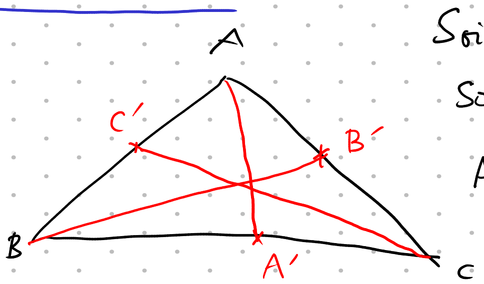
$\gamma=\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ alors $C'=\text{bar}\begin{pmatrix}A & B\\ 1 & -\gamma\end{pmatrix}$

D'après la proposition d'alignement avec les coo. barycentriques

A',B',C' alignés $\iff \begin{vmatrix}0 & 1 & -\alpha\\ -\beta & 0 & 1\\ 1 & -\gamma & 0\end{vmatrix}=0$

$\iff \quad -\alpha\beta\gamma+1=0$ □

3) Théorème de Céva :



Soient A, B, C affinement indépendants

Soient $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$

Alors (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes $\iff \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1$

□

Ex : les médianes d'un triangle sont concourantes

si A' = milieu de $[B,C]$, $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=-1$ $\qquad -1\times(-1)\times(-1)=-1$ ...

démo. Soit $M=\mathrm{Bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\x&y&z\end{pmatrix}$

$$M\in(AA')\iff\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-\alpha\\x&y&z\end{vmatrix}=0\iff\boxed{z+\alpha y=0}$$

de même $M\in(BB')\iff\boxed{x+\beta z=0}$

$M\in(CC')\iff\boxed{y+\gamma x=0}$

Supposons $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$

$$M\in(AA')\cap(BB')\iff\begin{cases}z=-\alpha y\\x=-\beta z\end{cases}\iff\begin{cases}z=-\alpha y\\x=\alpha\beta y\end{cases}\iff M=\mathrm{Bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\\alpha\beta y&y&-\alpha y\end{pmatrix}$$

$$\iff M=\mathrm{Bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\\alpha\beta&1&-\alpha\end{pmatrix}$$

de même $M\in(BB')\cap(CC')\iff M=\mathrm{Bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\-\beta&\beta\gamma&1\end{pmatrix}$

donc (AA'), (BB'), (CC') concourantes $\iff \mathrm{Bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\\alpha\beta&1&-\alpha\end{pmatrix}=\mathrm{Bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\-\beta&\beta\gamma&1\end{pmatrix}$

$$\iff\boxed{-\alpha\beta\gamma=1}$$

□

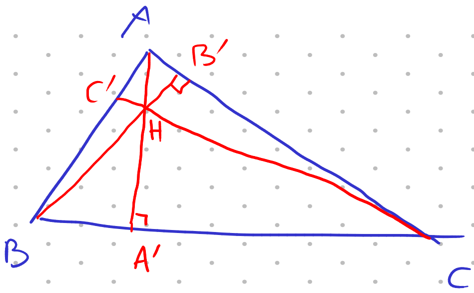
Remarque sur Ceva :

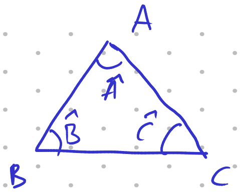
Le point d'intersection (si $\alpha\beta\gamma=-1$) est $\mathrm{bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\\alpha\beta&1&-\alpha\end{pmatrix}$

$=\mathrm{bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\1&-\gamma&\alpha\gamma\end{pmatrix}$

$=\mathrm{bar}\begin{pmatrix}A&B&C\\-\beta&\beta\gamma&1\end{pmatrix}$

Ex L'orthocentre





$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\tan \hat C}{\tan \hat B}$$

si $h = AA'$

$$\tan \hat B = \frac{h}{A'B}$$

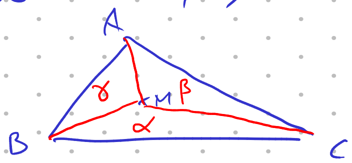
$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\tan \hat A}{\tan \hat C}$$

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\tan \hat B}{\tan \hat A}$$

on a bien $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

$$\boxed{H = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \tan \hat A & \tan \hat B & \tan \hat C \end{pmatrix}}$$

Exercice : Soit A, B, C affinement indépendants



α = aire (orientée) MBC

β = aire " MCA

γ = aire " MAB

c-à-d :

$2\alpha = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$

$2\beta = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$

$2\gamma = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

Alors $M = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

$= \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix}$

Solution (Indication) Soit $M = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ x & y & z \end{pmatrix}$

$$x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{BM} + z\overrightarrow{CM} = 0 \iff (x+y+z)\overrightarrow{BM} + x\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{CB} = 0$$

$$\iff (x+y+z)\overrightarrow{MB} = (x+z)\overrightarrow{AB} - z\overrightarrow{AC}$$

de même $(x+y+z)\overrightarrow{MC} = y\overrightarrow{BC} + x\overrightarrow{AC}$

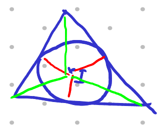
$= -y\overrightarrow{AB} + (x+y)\overrightarrow{AC}$

donc $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{1}{(x+y+z)^2}\underbrace{\begin{vmatrix} x+z & -z \\ y & x \end{vmatrix}}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= \dfrac{x}{x+y+z}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

de même $\det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \dfrac{y}{x+y+z}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{z}{x+y+z}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



Exemple :

$I = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$

où $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ est le centre du cercle inscrit.

Pause 5'.