Géométrie

1) Applications affines

Définition. Soient $(\mathcal{E}, E)$ et $(\mathcal{F}, F)$ deux K-espaces affines (K = corps ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$))

on dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application K-affine

s'il existe $\vec{f} : E \to F$ K-linéaire tq

$$\forall\, M, N \in \mathcal{E}, \quad \vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$$

$$\left(\Longleftrightarrow \quad \forall M, N \in \mathcal{E}, \quad f(N) = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{MN})\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists O \in \mathcal{E}, \forall N \in \mathcal{E}, \quad f(N) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{ON})$$

$$\left.\Longleftrightarrow \quad \forall M \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \quad f(M + \vec{u}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u})\right)$$

Remarque : $\vec{f}$ est unique c'est la partie linéaire de f.

__ex__ : * les translations. Si $\vec{u} \in E$, on pose $\tau_{\vec{u}} : \begin{array}{l} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ M \mapsto M + \vec{u} \end{array}$

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u} &= O + \overrightarrow{OM} + \vec{u} \\ &= (O + \vec{u}) + \overrightarrow{OM} \\ &= \tau_{\vec{u}}(O) + Id_E(\overrightarrow{OM}) \end{aligned}$$

donc $\tau_{\vec{u}}$ affine et $\vec{\tau_{\vec{u}}} = Id_E$

* les homothéties

Soit $A \in \mathcal{E}$, soit $\lambda \in K$.

$$h_{A,\lambda} : \begin{array}{l} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ M \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AM} \end{array}$$

$h_{A,\lambda}$ est affine, c'est l'homothétie de centre A de rapport λ

Remarque : $h_{A,\lambda}(A) = A$ et $\vec{h_{A,\lambda}} = \lambda\, Id_E$

Propriétés : 1) Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, si $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ affines, alors

$g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$

2) Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine et bijective, alors f^{-1} est affine

3) si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine, alors $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$ alignés, $f(A), f(B), f(C)$ aussi

Théorème Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$

Alors f affine $\iff$ f « préserve les barycentres » *

$*$: c-à-d, $\forall\, M = \text{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_1 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $A_i \in \mathcal{E}$, $\lambda_i \in K$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$

$$f(M) = \text{bar}\begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & f(A_n) \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>démo</u> : $\Rightarrow$: $M = \text{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_1 & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \lambda_1 \overrightarrow{A_1M} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{A_nM} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{f}\left(\lambda_1 \overrightarrow{A_1M} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{A_nM}\right) = \vec{0}$$

(car $\vec{f}$ linéaire)

$$\Rightarrow \lambda_1 \overrightarrow{f(A_1)f(M)} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{f(A_n)f(M)} = \vec{0} \text{ (car } f \text{ affine)}$$

$$\Rightarrow f(M) = \text{bar}\begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & f(A_n) \\ \lambda_1 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$: on pose $\vec{f}(\overrightarrow{MN}) := \overrightarrow{f(M)f(N)}$

1°) c'est bien défini

2°) c'est linéaire

<u>1°)</u> : si $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$ $\quad M_i, N_i \in \mathcal{E}$

alors $\overrightarrow{M_1N_1} + \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{M_1N_2} = 0$

$$\Rightarrow M_1 = \text{bar}\begin{pmatrix} N_1 & M_2 & N_2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(M_1) = \text{bar}\begin{pmatrix} f(N_1) & f(M_2) & f(N_2) \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(M_1)f(N_1)} + \overrightarrow{f(M_1)f(M_2)} - \overrightarrow{f(M_1)f(N_2)} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(M_1)f(N_1)} = \overrightarrow{f(M_2)f(M_1)} + \overrightarrow{f(M_1)f(N_2)} = \overrightarrow{f(M_2)f(N_2)}.$$

$\square$

<u>2°)</u> linéaire

$1 \neq \lambda \in K$. $\quad M + \lambda\overrightarrow{MN} =: P$

$$\iff \overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MN} \iff M \text{ bar}\begin{pmatrix} P & N \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(M) = \text{bar}\begin{pmatrix} f(P) & f(N) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(M)f(P)} = \lambda \overrightarrow{f(M)f(N)} \Rightarrow \vec{f}(\lambda\overrightarrow{MN}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{MN}).$$

de même pour $+$.

Exercice : si $K=\mathbb{R}$ alors

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est affine $\Leftrightarrow$ $\forall A,B,C \in \mathbb{R}^2$ alignés, $f(A), f(B), f(C)$ alignés

Définition Soit $(\mathcal{E}, E)$ espace affine

On note $GA(\mathcal{E}) = \{ f: \mathcal{E} \to \mathcal{E} : f \text{ affine bijective} \}$

(groupe affine de $\mathcal{E}$)

ex : $GA(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall x,\ f(x) = ax+b \text{ où } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \}$

Théorème : ($O \in \mathcal{E}$ fixé)

$$\begin{array}{ccc} E \times GL(E) & \longrightarrow & GA(\mathcal{E}) \\ \vec{u}, \ell & \longmapsto & \tau_{\vec{u}} \circ \ell_O \end{array}$$ Bijection

où $\ell_O(M) = O + \ell(\overrightarrow{OM})$ $(\forall M \in \mathcal{E})$

démo : si $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine bijective

$f(O) = O + \vec{v}$ pour un certain $\vec{v} \in E$

Alors $\tau_{-\vec{v}} \circ f\,(O) = O \Rightarrow \tau_{-\vec{v}} \circ f = \vec{f}_O$

$\Rightarrow f = \tau_{\vec{v}} \circ \vec{f}_O$ $\square$

Exercice : si $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u}+\vec{v}}$

si $A, B \in \mathcal{E}$, si $\lambda, \mu \in K$, $h_{A,\lambda} \circ h_{B,\mu} = \begin{cases} \text{homothétie de rapport } \lambda\mu & \text{si } \lambda\mu \neq 1 \\ \text{translation} & \text{si } \lambda\mu = 1 \end{cases}$

Théorème de Thalès

Notation : si $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{E}$ alignés

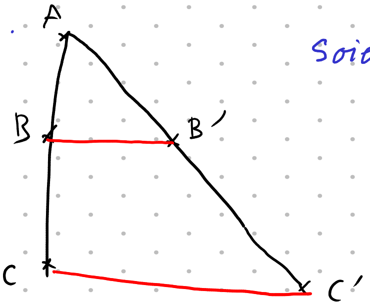
si $\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda \overrightarrow{M_1M_3}$ $\lambda \in K$, on note $\lambda = \dfrac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}}$

Plus généralement si $\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda \overrightarrow{M_3M_4}$, on pose $\lambda = \dfrac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_3M_4}}$

[On dit que $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ sont K affinement indépendants si $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}$ sont K-linéairement indépendants.

(Ils sont affinements liés sinon)

Remarque : $\iff$ $\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overrightarrow{A_2A_n}$ indépendants]



soient A, B, C alignés
A, B', C' alignés
A, B, B' affinement indépendants
$C' \notin \{A, B, B'\}$

Sont équivalents

1) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$

2) $(BB') \parallel (CC')$

3) $\exists\, h_A$ homothétie de centre A tq $h_A(B) = C$ et $h_A(B') = C'$

démo : 3) $\Rightarrow$ 1) si $h_A = h_{A,\lambda}$ $\lambda \in K$

$h_A(B) = A + \lambda \overrightarrow{AB} = C \iff \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \iff \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{\lambda}$

$h_A(B') = A + \lambda \overrightarrow{AB'} = C' \iff \overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{AB'} \iff \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \dfrac{1}{\lambda}$

1) $\Rightarrow$ 2) $\exists \lambda \in K$, $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AC'}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) = \lambda \overrightarrow{CC'}$

$\Rightarrow (BB') \parallel (CC')$

2) $\Rightarrow$ 3) Soit h_A l'homothétie de centre A tq $h_A(B) = C$

$h_A(B') = ?$

$\overrightarrow{h_A}(\overrightarrow{BB'}) =$ multiple de $\overrightarrow{BB'}$

donc $h_A((BB')) =$ droite parallèle à (BB') passant par $h_A(B) = C$

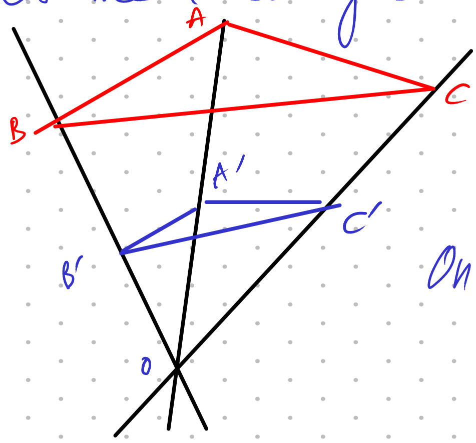
$= (CC')$

$\Rightarrow h_A(B') \in (CC')$. Comme h_A homothétie de centre A, $A, B, h_A(B')$ alignés donc $h_A(B') \in (AB') = (AC')$

$\Rightarrow \boxed{h_A(B') = C'} = (CC') \cap (AC')$

$\square$

Théorème de Desargues



A, B, C affinement indépendants

A', B', C' affinement indépendants

(dans le plan affine)

On suppose : $\begin{cases} (AB) \parallel (A'B') \\ (BC) \parallel (B'C') \\ (AC) \parallel (A'C') \end{cases}$

ALORS (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles.

démo. Supposons $(AA') \cap (BB') \ni O$.

Montrons $O \in (CC')$.

D'après Thalès : $\exists\, h_O$ homothétie de centre O tq $h_O : \begin{matrix} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \end{matrix}$

Alors $h_O(C) \in h_O((AC) \cap (BC)) = h_O((AC)) \cap h_O((BC))$

or $h_O((AC)) = (A'C')$ (droite parallèle à (AC) qui passe par $A' = h_O(A)$)

$h_O((BC)) = (B'C')$

$\Rightarrow h_O(C) \in (A'C') \cap (B'C') = \{C'\}$

$\Rightarrow h_O(C) = C' \Rightarrow O, C, C'$ alignés

$\Rightarrow O \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$.

$\square$

Pause 5'.