Géométrie

1) Sous-espaces affines

Soit E un K-espace vectoriel

définition : Une partie $\mathcal{F} \subset E$ est un sous-espace affine s'il existe $x \in E$ et $F \leqslant E$ (sous-espace vectoriel) tq $\mathcal{F} = x + F = \{x + v : v \in F\}$

Remarque : $F = \{x_1 - x_2 : x_1, x_2 \in \mathcal{F}\}$ noté $\vec{\mathcal{F}}$ (partie linéaire)

Exercice : Une intersection de sous-espaces affines est soit vide soit un sous-espace affine.

2) Espace affine abstrait.

définition 1 : Un K-espace affine est un ensemble $\mathcal{E}$ avec une action simplement transitive d'un K-espace vectoriel E :

$$E \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$\vec{u}, x \longmapsto x + \vec{u}$$

tq : $\begin{cases} 1) \ \forall x \in \mathcal{E}, \ x + \vec{0} = x \\ 2) \ \forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \ (x + \vec{u}) + \vec{v} = x + (\vec{u} + \vec{v}) \\ 3) \ \forall x, y \in \mathcal{E}, \exists! \vec{u} \in E, \ x + \vec{u} = y \end{cases}$ $\left.\right\}$ action $\left.\right\}$ simplement transitive

on note $\vec{\mathcal{E}} = E$ la partie linéaire de E.

exc : $\mathcal{E} = \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$, sous-espace affine, $E = F = \vec{\mathcal{F}}$,

$$F \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$v, x \longmapsto x + v$$

un sous-espace affine est un espace affine

définition 1' : Un espace affine est un ensemble $\mathcal{E}$ tq il existe E un K-espace vectoriel et $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow E$ une application tq

$$(x, y) \longmapsto \overrightarrow{xy}$$

1) $\forall A, B, C \in \mathcal{E}, \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles)

2) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \exists! B \in \mathcal{E}, \ \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

définition 1 $\Longleftrightarrow$ définition 1'

3) Barycentres

$\boxed{\begin{array}{l} x, y \in \mathcal{E} \\ x + \overrightarrow{xy} = y \end{array}}$

$\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$

car $\forall x, \overrightarrow{xx} = \vec{0}$

Proposition. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tq $\underline{\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0}$

Alors il existe un unique $B \in \mathcal{E}$ tq

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \vec{0}$$

on le note $B = \mathrm{bar}\left((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)\right)$

<u>démo.</u> <u>unicité</u> Si C convient aussi alors

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)}_{\neq 0} \overrightarrow{BC} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\overrightarrow{BA_i} + \overrightarrow{A_iC}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{CA_i}$$

$$= \vec{0} \quad \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ c-à-d } B = C.$$

(On suppose $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$)

<u>existence</u> : Soit $O \in \mathcal{E}$ quelconque.

alors $B = O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \in \mathcal{E}$

B convient car $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} \underset{\text{(Chasles)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BO} + \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$

$$\Rightarrow 0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \underbrace{O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}_{B} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BO}$$

$$\Rightarrow \quad = B + \overrightarrow{BO}$$

$$= O$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \vec{0}}$$

<u>Ex.</u> Le milieu M du segment $[AB] = \{A + x\overrightarrow{AB} : 0 \leq x \leq 1\}$

est $\mathrm{bar}((A,1),(B,1))$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

<u>rem</u> : $\mathrm{bar}\left((A_1, \lambda_1) \dots (A_n, \lambda_n)\right) = \mathrm{bar}\left((A_1, t\lambda_1), \dots, (A_n, t\lambda_n)\right)$

$\forall \lambda_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0, \quad \forall t \neq 0.$

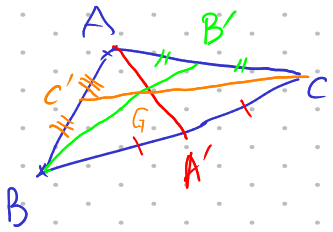
Théorème (associativité)

Si $B = \text{bar}((A_1,\lambda_1),\dots,(A_n,\lambda_n))$ $\quad (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0)$

Si $C = \text{bar}((A_1,\lambda_1),\dots,(A_n,\lambda_n),(A'_1,\mu_1),\dots,(A'_{n'},\mu_{n'}))$ $\quad (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \sum_{i=1}^{n'}\mu_i \neq 0)$

alors $C = \text{bar}((B,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i),(A'_1,\mu_1),\dots,(A'_{n'},\mu_{n'}))$

Ex :



Soit $G = \text{bar}((A,1),(B,1),(C,1))$

Alors $G \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$

En effet : $G = \text{bar}((C',2),(C,1)) \Rightarrow 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}$

$= 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

$\Rightarrow G \in (CC')$.

Définition : $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ espace affine est un sous-espace affine si $\exists x \in \mathcal{E}$, $F \leq \vec{\mathcal{E}}$ sous-espace vectoriel tq

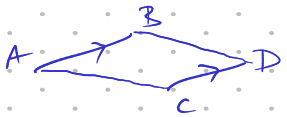
$\mathcal{F} = x + F = \{x + v : v \in F\}$

Proposition : $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ sous-espace affine

$\Leftrightarrow \emptyset \neq \mathcal{F}$ et $\forall A_1,\dots,A_n \in \mathcal{F}$, $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$,

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \text{bar}((A_1,\lambda_1),\dots,(A_n,\lambda_n)) \in \mathcal{F}$.

Exercice Soient $A,B,C,D \in \mathcal{E}$ espace affine.



Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

démo : $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

Pause 5'.