Analyse complexe

Théorème des résidus :

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert

Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet tq $\forall x \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}(x,\gamma) = 0$

Soit f une fonction tq $\forall x \in \Omega$ f holomorphe en x ou a une singularité en x

On suppose que f holomorphe en tout $x \in \gamma$.

Alors $$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{a \text{ singularité}} \mathrm{Rés}_a f \ \mathrm{Ind}(a,\gamma)$$

Calcul du résidu :

Si f a un pôle simple en a, alors $\mathrm{Rés}_a f = \lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} (z-a)f(z)$

[En effet : $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^n$ $(\forall 0<|z-a|<r)$

pour un certain $r>0$.

$\mathrm{Rés}_a f = c_{-1}$. Et $(z-a)f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}(z-a)^n \underset{z\to a}{\longrightarrow} c_{-1}$]

En particulier si $f = \frac{P}{Q}$ où P,Q holomorphes en a, $P(a)\neq 0$ et a zéro simple de Q

zéro de multiplicité 1

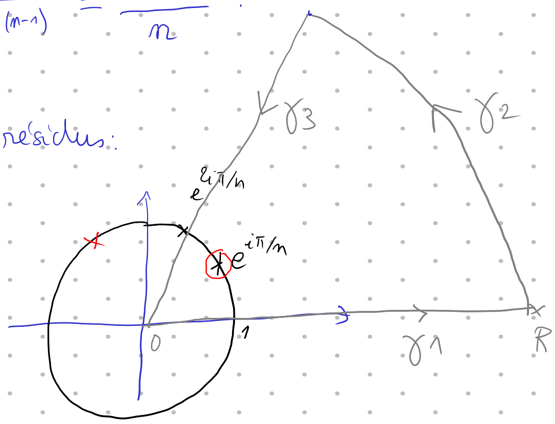
c-à-d : $Q(z) = (z-a)\tilde{Q}(z)$ où $\tilde{Q}$ holomorphe $\tilde{Q}(a)\neq 0$

alors $\mathrm{Rés}_a f = \lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} \frac{(z-a)}{Q(z)} P(z) \boxed{= \frac{P(a)}{Q'(a)}}$.

<u>Ex.</u> $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$, $\mathrm{Rés}_{e^{i\pi/n}} f = \frac{1}{n\, e^{\frac{i\pi}{n}(n-1)}} = \frac{-e^{i\pi/n}}{n}$.

Exemple d'utilisation du théorème des résidus :

Calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.



On pose $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$

Soient $\gamma_1 : [0,R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t$; $\gamma_2 : [0,\frac{2\pi}{n}] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$; $\gamma_3 : [0,R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (R-t)e^{2i\pi/n}$

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

D'après la formule des résidus pour f $(\Omega = \mathbb{C}, \gamma)$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{a\in\{e^{i\pi/n + \frac{2k\pi}{n}} \mid 0\le k\le n-1\}} \mathrm{Rés}_a f \ \mathrm{Ind}(a,\gamma) = \mathrm{Rés}_{e^{i\pi/n}} f \times 1$$

$$= -\frac{e^{i\pi/n}}{n}$$

On $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^R f(x)\,dx = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \qquad (n \geq 2)$$

$$\int_{\gamma_2} f = \int_0^{2\pi/n} f(Re^{it})\, Rie^{it}\,dt = \underbrace{\int_0^{2\pi/n} \frac{Rie^{it}\,dt}{1+R^n e^{int}}}_{|\;| \leq \frac{R}{R^n-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{\gamma_3} f = \int_0^R f\left((R-t)e^{2i\pi/n}\right)\left(-e^{2i\pi/n}\right) dt$$

$$= \int_0^R \frac{-e^{2i\pi/n}}{1+(R-t)^n}\,dt = -\int_0^R e^{2i\pi/n} \frac{dx}{1+x^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} -\left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}\right) \times e^{2i\pi/n}$$

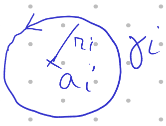
donc $\displaystyle -\frac{e^{i\pi/n}}{n} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} - \frac{e^{2i\pi/n}}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$

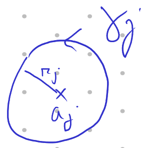
donc $\displaystyle \frac{(1-e^{2i\pi/n})}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{e^{i\pi/n}}{n} \Longrightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\sin \pi/n}{\pi/n}} \quad (\forall n \geq 2).$

démo du théorème des résidus:

$\{x \in \Omega \mid \text{Ind}(x,\gamma) \neq 0$ et x singularité non artificielle de $f\} =$ fini

$= \{a_1, \ldots, a_N\}$ $\quad a_i \neq .$





On pose $\forall i, \quad \gamma_i : \begin{array}{l} t \longmapsto a_i + r_i e^{it} \\ [0,2\pi] \to \mathbb{C} \end{array}$

où $r_i > 0$ tq f est holomorphe sur $D(a_i, 2r_i) \setminus \{a_i\}$

On choisit les r_i tq $\forall i \neq j \quad D(a_i,2r_i) \cap D(a_j, 2r_j)$

On pose $\Gamma = \gamma - \sum_{i=1}^N n_i \gamma_i$ où $n_i = \text{Ind}(a_i,\gamma)$

Alors $\forall x \notin \Omega'$, $\text{Ind}(x,\Gamma) = 0$

où $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$

en effet si $x = a_i$ $\quad \text{Ind}(a_i,\Gamma) = \text{Ind}(a_i,\gamma) - \sum_{j=1}^N n_j \underbrace{\text{Ind}(a_i,\gamma_j)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}}$

$= \text{Ind}(a_i,\gamma) - n_i = 0$

si $x \notin \Omega$, $x \in D(a_i, 2r_i)$ $(\forall i)$ $\Longrightarrow \text{Ind}(x,\Gamma) = \text{Ind}(x,\gamma) = 0.$

On f holomorphe sur Ω' donc d'après la formule de Cauchy (généralisée), $\displaystyle\int_\Gamma f = 0 \Longleftrightarrow \int_\gamma f - \sum_{i=1}^N n_i \int_{\gamma_i} f = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{N} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind}(a_i,\gamma)}}{n_i} \times \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_i} f}_{\text{Rés}_{a_i} f}$$

Car $\forall\, 0<|z-a_i|<2r_i$, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a_i)^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_i} f = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{\gamma_i} (z-a_i)^n dz}_{=0 \text{ si } n\neq -1}$$

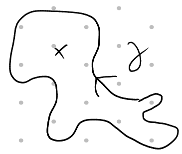
$$= c_{-1}\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_i}\frac{dz}{z-a_i}$$

$$= c_{-1} = \text{Rés}_{a_i} f. \qquad \square$$

Corollaire

Théorème de Rouché

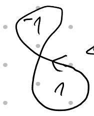
Soient Ω ouvert de $\mathbb{C}$ (connexe), f holomorphe sur Ω (non constante), $\gamma \subset \Omega$ $\boxed{\text{lacet simple}}$ *
tq γ ne passe par aucun zéro de f
$\forall x \notin \Omega$, $\text{Ind}(x,\gamma) = 0$



* γ lacet simple c-à-d : $\forall x \notin \gamma$, $\text{Ind}(x,\gamma) = 0$ ou 1

↑ simple

ALORS 1) $Z(f,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}$ = nombre de zéros de f comptés avec multiplicité « à l'intérieur de γ » (là où l'indice $= 1$)



← pas simple

2) si g holomorphe sur Ω, (si γ ne passe par aucun zéro de g) et $\forall x \in \gamma$ $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$

Alors $Z(g,\gamma) = Z(f,\gamma)$.

démo : 1) si f a un zéro de multiplicité m_i en a_i, alors

$$f(z) = (z-a_i)^{m_i} h(z) \quad \text{avec } m_i > 0,\ h \text{ holomorphe sur } \Omega \text{ et } h(a_i) \neq 0.$$

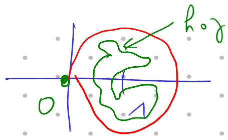
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f} \underset{\text{(Résidus)}}{=} \sum_i \text{Rés}_{a_i}\frac{f'}{f}\,\text{Ind}(a_i,\gamma) \quad \boxed{= \sum_{i\,:\,a_i \text{ à l'intérieur de } \gamma} m_i}$$

$$= \sum_{i\,:\,a_i \text{ à l'intérieur de } \gamma} \text{Rés}_{a_i} \frac{f'}{f}$$

Or
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_i (z-a_i)^{m_i-1} h(z) + (z-a_i)^{m_i} h'(z)}{(z-a_i)^{m_i} h(z)} = \frac{m_i}{z-a_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

$$\text{Rés}_{a_i}\frac{f'}{f} = \lim_{\substack{z\to a_i \\ z\neq a_i}} (z-a_i)\frac{f'(z)}{f(z)} = m_i$$

2) Poser $h = f/g$



$\forall x \in \gamma, \quad |f(x) - g(x)| < |f(x)|$

$\Rightarrow \forall x \in \gamma, \ |h(x) - 1| < 1 \Rightarrow h\circ\gamma \subset D(1,1)$

Donc $Z(f,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f'/f \qquad Z(g,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g'}{g}$

$$Z(f,\gamma) - Z(g,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h'}{h}$$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{h'(\gamma(t))\gamma'(t)}{h(\gamma(t))}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{h\circ\gamma} \frac{dw}{w} = 0 \qquad \square$$

Rappel si $\gamma_1, \dots, \gamma_K$ lacets

si $n_1, \dots, n_K$ entiers.

si $\Gamma = n_1\gamma_1 + \dots + n_K\gamma_K$

on pose $\boxed{\int_\Gamma f := \sum_{i=1}^{K} n_i \int_{\gamma_i} f}$ si f continue sur $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_K$

Pause 5'.