Analyse complexe

1) Séries de Laurent

Définition

Une série de Laurent est de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$

où $z_0 \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

ex. $\dfrac{1}{z-z^2} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \quad (\forall\, 0<|z|<1)$

$\dfrac{1}{z-z^2} = -\dfrac{1}{z^2}\,\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\dfrac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n} = -\sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \quad (\forall |z|>1)$

Théorème de Laurent Soient $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$

Soit $\mathcal{C}(R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$

Soit f holomorphe sur $\mathcal{C}(R_1,R_2)$, alors il existe une unique $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$

tq $\forall\, R_1<|z|<R_2$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$

où $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z|^n < \infty$ et $\sum_{n=-1}^{-\infty} |a_n|.|z|^n < \infty$

[et par définition $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$= \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to-\infty}} \sum_{k=M}^{N} a_k z^k$]

Ex. $\dfrac{1}{z-z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ sur $\mathcal{C}(0,1) = \{z : 0<|z|<1\}$ $\quad \forall n \geq -1,\ a_n = 1$; $\forall n < -1,\ a_n = 0$

$= -\sum_{n=-2}^{-\infty} z^n$ sur $\mathcal{C}(1,+\infty) = \{z \mid 1<|z|<\infty\}$ $\quad \forall n \le -2,\ a_n = -1$; $\forall n > -2,\ a_n = 0$

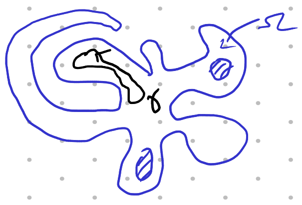
Formule de Cauchy généralisée

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert quelconque. Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (holomorphe sur Ω)

tq: (*) $\boxed{\forall z \notin \Omega,\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0}$

ALORS $\forall z \in \Omega\setminus\gamma$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(w)}{w-z}\,dw$

ex:



Corollaire Sous les mêmes hypothèses, $\int_\gamma f = 0$

[il suffit d'appliquer Cauchy généralisée à $\tilde{f}(w) = f(w)(w-z)$]

Démo de Cauchy généralisée : On pose $H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw & \text{si } z \in \Omega \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw & \text{si } \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \end{cases}$

H est bien définie ! car $\Omega \cup \underbrace{\{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}}_{\text{ouvert}} = \mathbb{C}$

et si $z \in \Omega \setminus \gamma$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$, alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} - f(z)\underbrace{\cancel{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}}_{0}$

H est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

De plus, $\lim_{|z|\to+\infty} H(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0$

car $\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_\gamma \ell(\gamma)\frac{1}{|z|-a}$ où $a = \max\{|z| : z \in \gamma\}$

donc H bornée $\Rightarrow$ (Liouville) $H = 0$.

$\Rightarrow \forall z \in \Omega\setminus\gamma,\ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} = f(z)\overbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}}^{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}$

□

<u>Notation</u> si $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ sont des lacets $\subset \Omega$

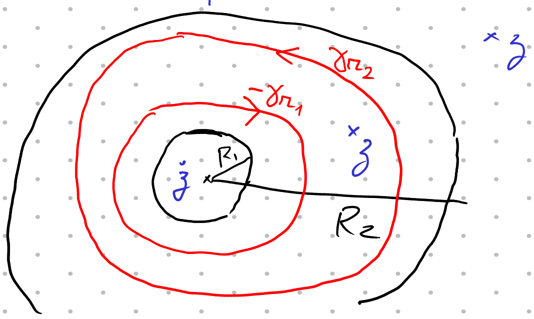
si $\Gamma = m_1\gamma_1 + \dots + m_N\gamma_N$ $\quad m_i \in \mathbb{Z}$

si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on pose $\int_\Gamma f = m_1\int_{\gamma_1} f + \dots + m_N\int_{\gamma_N} f$

$\forall z \notin \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N$, $\mathrm{Ind}_\Gamma z = m_1 \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) + \dots + m_N \mathrm{Ind}_{\gamma_N}(z)$.

<u>Remarque</u> : La formule de Cauchy généralisée est vraie pour Γ à la place de γ

<u>démo du théorème de Laurent</u>



Soient $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$

$\gamma_{r_1} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto r_1 e^{it}$ $\qquad \gamma_{r_2} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto r_2 e^{it}$

Soit $\Gamma = \gamma_{r_2} - \gamma_{r_1}$

$\Omega = \mathcal{C}(R_1, R_2) = \{R_1 < |z| < R_2\}$

$\forall |z| \leq R_1, \forall |z| \geq R_2, \quad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_2}}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_1}}(z) = 0$

Cauchy généralisé pour f, Γ et Ω :

$\forall\ r_1 < |z| < r_2 \quad \underbrace{\mathrm{Ind}_\Gamma(z)}_{1} f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

$\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

Or si $|z| < r_2$, $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(r_2e^{it})r_2 i e^{it}}{r_2e^{it} - z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(r_2e^{it})}{1 - \frac{z}{r_2e^{it}}}\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{r_2^k} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r_2 e^{it})\, e^{-ikt}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,r_2}\, z^k \quad \text{où } a_{k,r_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(r_2 e^{it})}{r_2^k e^{ikt}}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$$

de même si $|z|>r_1$ $\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{-1}{2\pi z}\int_0^{2\pi} \frac{f(r_1 e^{it})\, r_1 e^{it}}{\frac{r_1 e^{it}}{z} - 1}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^{2\pi} f(r_1 e^{it})\, r_1^{k+1} e^{i(k+1)t}\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k,r_1}\, z^{-k}$$

où $a_{k,r_1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$

De plus $a_{k,r} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$ ne dépend pas de r.

$(R_1 < r < R_2)$

$|z| \neq r$

car $\forall R_1 < r \neq r' < R_2$, $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r - \gamma_{r'}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw = 0$.

(Cauchy généralisée pour $\Gamma = \gamma_r - \gamma_{r'}$)

Donc $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ où $\forall n$, $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw$ $(\forall R_1 < r < R_2)$.

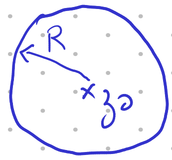
car $\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^{k-n-1} \Rightarrow \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw = a_n \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{dw}{w}}_{2i\pi} + 0$

□

Définitions (singularités)

Définition. Soit f fonction. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

On dit que f a une singularité en z_0 s'il existe $R>0$ tq f holomorphe sur $D(z_0,R) \setminus \{z_0\} = \{0 < |z-z_0| < R\}$



ex: $\frac{1}{z^2}$ a une singularité en 0

$e^{1/z}$ a une singularité en 0.

Si f a une singularité en z_0, alors il existe $R>0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tq

$$\forall\, 0 < |z-z_0| < R, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

a) si $\forall n<0,\ a_n=0$, on dit que z_0 est <u>artificielle</u>

(f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z_0)

b) si $\emptyset \neq \{n<0 : a_n \neq 0\}$ fini, on dit que z est un <u>pôle d'ordre q</u>

$q = -\min\{n<0 : a_n \neq 0\}$

$\frac{1}{z^2}$ a un pôle d'ordre 2 en 0

c) si $\{n<0 : a_n \neq 0\}$ infini on dit que z_0 est une <u>singularité essentielle</u>

0 est une singularité essentielle de $e^{1/z}$.

DÉFINITION : Si z_0 singularité, le résidu de f en z_0 est :

$$\text{Rés}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} f \quad \text{où } \gamma_r(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

(si f holomorphe sur $0<|z-z_0|<R$ et $0<r<R$)

ex $\text{Rés}_0 \frac{1}{z-z^2} = +1$ car $\forall\ 0<|z|<1,\ \frac{1}{z-z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$

$\text{Rés}_1 \frac{1}{z-z^2} = -1$ car $\frac{1}{z-z^2} = \frac{-1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z-1}\,\frac{1}{1+(z-1)} = \frac{-1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k$

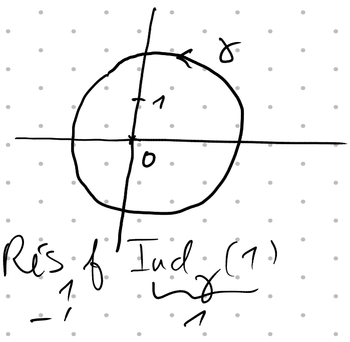
$\forall\ 0<|z-1|<1$

THÉORÈME des résidus

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet, Soit f fonction tq

1) $\forall z \notin \Omega$, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$
2) $\forall z \in \Omega$, f a une singularité en z (ou est holomorphe en z)
3) γ ne passe pas par les pôles ni par les singularités essentielles
(f holomorphe en tous les $z \in \gamma$)

<u>ALORS</u> $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{z\in\mathbb{C}} \text{Rés}_z f \cdot \text{Ind}_\gamma(z)$



<u>ex</u>. $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$ $\gamma(t) = 2e^{it}$

$\Omega = \mathbb{C}$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \underbrace{\text{Rés}_0 f}_{1}\cdot\underbrace{\text{Ind}_\gamma(0)}_{1} + \underbrace{\text{Rés}_1 f}_{-1}\cdot\underbrace{\text{Ind}_\gamma(1)}_{1}$$

$$= 1-1=0$$

□

Pause 5'.