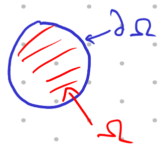
Analyse complexe

Principe du maximum

Théorème. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe où $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe.
Si $|f|$ a un maximum local en $a \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.

Corollaire. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe borné
Si f est continue bornée sur $\bar{\Omega}$, alors $\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$
où $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

Ex: si $\Omega = \{|z| < R\}$, $\partial\Omega = \{|z| = R\}$



demo: Théo. $\Rightarrow$ corollaire :
soit $(z_n)_n$ suite dans Ω tq $\lim_n |f(z_n)| = \sup_{\Omega} |f|$

Comme Ω bornée, $\exists (z_{\varphi(n)})_n$ suite extraite qui converge vers $a \in \bar{\Omega}$

Si $a \in \Omega$, alors $|f(a)| = \lim_n |f(z_{\varphi(n)})| = \sup_{\Omega} |f|$

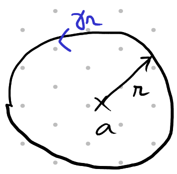
donc $|f|$ a max local en a donc f constante

donc $|f| = |f(a)|$ sur $\partial\Omega$.

Si $a \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$, alors $|f(a)| = \sup_{\partial\Omega} |f|$. $\square$

demo du théorème.

Soit $r > 0$ tq $\forall |z-a| \leq r$, $z \in \Omega$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$



Formule de Cauchy $\Rightarrow$ $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz$

où $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto a + re^{it}$

donc $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, dt$

Or $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)|^2 dt = |f(a)|^2$

Or f analytique en a $\Rightarrow$ $\exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall |z-a| \leq r$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$
avec $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$.

Donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n \geq 0} a_m \bar{a}_n r^{m+n} e^{i(m-n)t} \, dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n \geq 0} a_m \bar{a}_n r^{2n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq |f(a)|^2 = |a_0|^2$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{2n} \leq 0 \Rightarrow \forall n \geq 1, \quad a_n = 0.$$

Donc $f(z) = f(a) \quad (\forall |z-a| \leq r)$

$$\Rightarrow \forall k \geq 1, \quad f^{(k)}(a) = 0$$

$$\Rightarrow \forall z \in \Omega, \quad f(z) = f(a) \quad . \square$$

Application.

Lemme de Schwarz. Soit $D = D(0,1) = \{|z| < 1\}$

Soit $f : D \to D$ biholomorphe

(c-à-d : f holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe)

Si $\underline{f(0) = 0}$, alors $\exists |u| = 1, \forall z \in D, \quad f(z) = uz$.

démo. Soit $\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$

La fonction φ est holomorphe sur D.

En effet. Au voisinage de 0, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = f(0) = 0$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad (\text{rayon de convergence} \geq 1)$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$$

holomorphe sur D.

$\forall\, 0 < r < 1, \quad \displaystyle\sup_{|z| \leq r} |\varphi(z)| = \sup_{|z| = r} |\varphi(z)|$

Or $|z| = r \Rightarrow |\varphi(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|z|} \leq \dfrac{1}{r}$

donc $\forall |z| \leq r, \quad |\varphi(z)| \leq \dfrac{1}{r} \qquad (\forall\, 0 < r < 1)$

$$\Rightarrow \forall z \in D, \quad |\varphi(z)| \leq 1.$$

$$\Rightarrow |\varphi(0)| = |f'(0)| \leq 1$$

de même $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$ car $f^{-1} : D \to D$ holomorphe.

Or $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} \Rightarrow \underline{|f'(0)| = 1}$

donc φ a un maximum (global) en $0 \in D$

$\forall z \in D,\ |\varphi(z)| \leq |\varphi(0)| \underset{\text{principe du maximum}}{\Longrightarrow} \varphi(z) = \lambda$ constante.

$\varphi(0) = f'(0) = \lambda$ et $|\lambda| = 1$.

$\forall z \in D,\ f(z) = \lambda z$ $\square$

Automorphismes de $D = D(0,1)$

Théorème. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(D) := \{ f : D \to D : f \text{ biholomorphe} \}$

$= \{ h_{\theta,a} : \theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1 \}$

où $h_{\theta,a}(z) = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$

démo. a) $h_{\theta,a} : D \to D$ biholomorphisme $(\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall |a| < 1)$

en effet : $h_{\theta,a}$ définie sur D. $h_{\theta,a} : D \to \mathbb{C}$

$h_{\theta,a}$ continue sur $\overline{D}$ car $\left|\dfrac{1}{\bar{a}}\right| > 1$.

donc d'après le principe du maximum, $\sup\limits_{D} |h_{\theta,a}| = \sup\limits_{|z|=1} |h_{\theta,a}(z)|$

Or si $z = e^{i\alpha}$ (de module 1), $h_{\theta,a}(e^{i\alpha}) = e^{i\theta}\left(\dfrac{e^{i\alpha} - a}{1 - \bar{a}e^{i\alpha}}\right)$

$\Rightarrow |h_{\theta,a}(e^{i\alpha})| = \left|\dfrac{e^{i\alpha} - a}{1 - \bar{a}e^{i\alpha}}\right| = \left|\dfrac{1 - ae^{-i\alpha}}{1 - \bar{a}e^{i\alpha}}\right| = \left|\dfrac{x}{\bar{x}}\right| = \underline{1}$.

où $x = 1 - ae^{-i\alpha}$

Donc $\forall z \in D,\ |h_{\theta,a}(z)| \leq 1 \underset{\text{principe du max}}{\Longrightarrow} \forall z \in D,\ |h_{\theta,a}(z)| < 1$.

Donc $h_{\theta,a} : D \to D$

$h_{\theta,a}(z) = y \Longleftrightarrow e^{i\theta}\left(\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = y \Leftrightarrow (e^{i\theta} + \bar{a}y)z = y + ae^{i\theta}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{y + ae^{i\theta}}{e^{i\theta} + \bar{a}y}$

donc $h_{\theta,a}^{-1}(y) = \dfrac{y + ae^{i\theta}}{e^{i\theta} + \bar{a}y}$ holomorphe sur D.

Remarque $h_{\theta,a}^{-1} = h_{\theta',a'}$ pour certain $\theta' \in \mathbb{R}$, $|a'|<1$.

b) Soit $h : D \to D$ biholomorphe.

Notation. Si $A \in GL_2(\mathbb{C})$, on pose $h_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$
$\quad \overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

par ex. $h_{\theta,a} = h_{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & -ae^{i\theta} \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix}} = h_{\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & -ae^{i\theta/2} \\ -\bar{a}e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}}$

de plus, $\forall t \in \mathbb{C}^*$, $h_{tA}(z) = h_A(z)$ $(\forall z)$
$\forall A \in GL_2(\mathbb{C})$

$= h_{\frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & -ae^{i\theta/2} \\ -\bar{a}e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}}$

Soit $P := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1 \right\} \underset{\text{sous-groupe}}{\leq} GL_2(\mathbb{C})$

et $\{ h_{\theta,a} : \theta \in \mathbb{R}, |a|<1 \} = \{ h_A : A \in P \}$ (exo)

De plus : $\forall A, B \in P$, $\underbrace{h_A \circ h_B}_{\text{composition}} = h_{\underbrace{AB}_{\text{produit des matrices}}}$

Soit $h : D \to D$ biholomorphisme

Soit $a = h(0)$. $\quad h_{0,a}(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

donc $\underbrace{h_{0,a} \circ h}_{\text{biholomorphisme}} (0) = 0$.

D'après le lemme de Schwarz, $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $h_{0,a} \circ h(z) = \underbrace{e^{i\theta} z}_{h_{\theta,0}}$

donc $\forall z \in D$, $h(z) = \underbrace{h_{0,a}^{-1} \circ h_{\theta,0}}_{h_M}$

où $M = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-|a|^2}} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \in P$

$= h_{\theta',a'}$ pour certain $\theta' \in \mathbb{R}$, $|a'|<1$. □

Définition : Une homographie est une fonction de la forme
$h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Pause 5'.