Analyse complexe

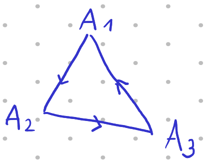
1) Théorème de Goursat

Théorème : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$; soit f holomorphe sur Ω

Soit $T \subset \Omega$, T triangle

ALORS $\int_{\partial T} f = 0$.

$A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$

$T =$ 

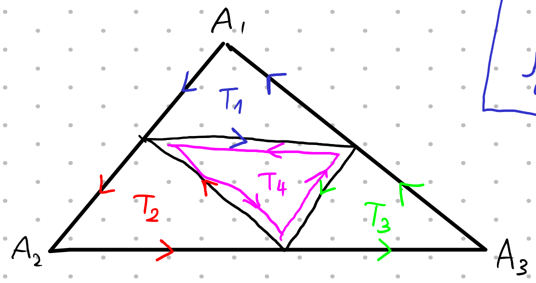
$\left(T = \{ xA_1 + yA_2 + zA_3 : x,y,z \in \mathbb{R}_+,\ x+y+z = 1\}\right)$

$$\int_{\partial T} f := \int_{[A_1,A_2]} f + \int_{[A_2,A_3]} f + \int_{[A_3,A_1]} f$$

où si $a, b \in \mathbb{C}$, on note $\int_{[a,b]} f = (b-a)\int_0^1 f((1-t)a+tb)\, dt = \int_\gamma f$ où $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto (1-t)a + tb$

$$\left[\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f \right]$$

démo.



$$\boxed{\int_{\partial T} f = \int_{\partial T_1} f + \int_{\partial T_2} f + \int_{\partial T_3} f + \int_{\partial T_4} f}$$

$\gamma = \partial T$

$\gamma_i = \partial T_i$

$\exists\ 1 \leq i \leq 4$, $\quad \left| \int_{\gamma_i} f \right| \geq \dfrac{\left|\int_\gamma f\right|}{4}$.

on pose $T^0 = T$, $T^1 = T_i$

Par récurrence, on construit $T^0, T^1, T^2, \dots$

T^{k+1} = un triangle $\subset T^k$ tq $\left| \int_{\partial T_{k+1}} f \right| \geq \dfrac{\left| \int_{\partial T_k} f \right|}{4}$

Soit $I = \int_{\partial T} f$

et $L(\partial T_{k+1}) = \frac{1}{2} L(\partial T_k)$

$\operatorname{diam}(T_{k+1}) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(T_k)$

Alors $T^0 \supset T^1 \supset T^2 \supset \dots$

et $\bigcap_{l \geq 0} T^l = \{z_0\}$ pour un $z_0 \in \mathbb{C}$ (intersection décroissante de compacts)

et $\forall k \geq 0$, $\quad \left| \int_{\partial T_k} f \right| \geq \dfrac{|I|}{4^k}$

Or f holomorphe en $z_0 \Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tq $\forall\ 0 \leq |z-z_0| < \eta$, $z \in \Omega$ et $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \leq \varepsilon |z-z_0|$

Soit k tq $\frac{\operatorname{diam} T}{4^k} < \eta$.

Alors $\int_{\partial T_k} f = \int_{\partial T_k} \big(f(z) - \underbrace{f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)}_{\text{a une primitive en } z}\big)\, dz$

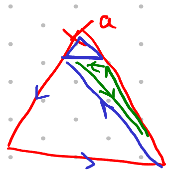
$$\Rightarrow \quad \frac{|I|}{4^k} \leq \left|\int_{\partial T_k} f\right| \leq \varepsilon L(\partial T_k) \operatorname{diam} T_k = \varepsilon \frac{L(\partial T) \operatorname{diam} T}{4^k}$$

$$\Rightarrow \quad |I| \leq \varepsilon L(\partial T) \operatorname{diam} T \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 0}$$

□

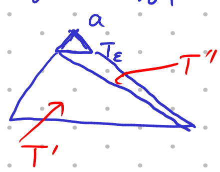
__Remarque:__ Le théorème de Goursat reste vrai si f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ où $a \in \Omega$.



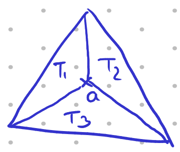
$$\int_\gamma f = \int_{\partial T_\varepsilon} f + \overbrace{\int_{\partial T'} f}^{0} + \overbrace{\int_{\partial T''} f}^{0}$$

$\downarrow \varepsilon \to 0$

0



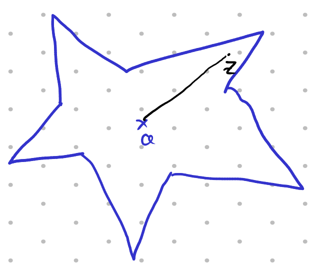
Si a dans l'intérieur :



$$\int_{\partial T_1} f + \int_{\partial T_2} f + \int_{\partial T_3} f = 0.$$

__Déf:__ $\Omega \subset \mathbb{C}$ est étoilé si $\exists a \in \Omega \,/\, \forall z \in \Omega, [a,z] \subset \Omega$

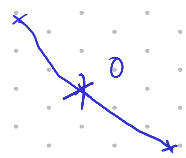
__ex:__



Ω étoilé

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ étoilé

$\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé



2) Théorème de Cauchy : Soit Ω ouvert étoilé, Soit f holomorphe sur Ω

Alors 1) f a une primitive sur Ω

2) $\forall \gamma \subset \Omega$ lacet, $\int_\gamma f = 0$

démo : 1) ⇒ 2) si $F' = f$ si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ lacet (avec $\gamma(a) = \gamma(b)$)

alors $\displaystyle\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \left[F\circ\gamma\right]_a^b = 0$

1) : Soit a tq $\forall z \in \Omega$, $[a,z] \subset \Omega$

alors on pose $\displaystyle F(z) = \int_{[a,z]} f = (z-a)\int_0^1 f((1-t)a + tz)\,dt$

$$\frac{F(z') - F(z)}{z'-z} \underset{\text{(Goursat)}}{=} \frac{1}{z'-z}\int_{[z,z']} f$$

$$\underbrace{\int_{[a,z']} f}_{F(z')} + \int_{[z',z]} f + \underbrace{\int_{[z,a]} f}_{-F(z)} = 0$$

Or $\displaystyle\frac{1}{z'-z}\int_{[z,z']} f = \underbrace{\int_0^1 f((1-t)z + tz')\,dt}_{z'\to z}$

$$\xrightarrow[z'\to z]{} f(z)$$

donc $F'(z) = z$.

<u>Remarque</u> : le théorème de Cauchy reste vrai si f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$.

contre-ex : $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive définie sur $\mathbb{C}^*$ (exo)

car $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi \neq 0$

$\mathcal{C}(0,1) : \begin{array}{l}[0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it}\end{array}$

3) <u>Formules de Cauchy</u> Soit Ω étoilé, Soit f holomorphe sur Ω, Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet

a) $\forall z \in \Omega\setminus\gamma$, $\displaystyle\mathrm{Ind}(z,\gamma) f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du$

b) $\forall z \in \Omega\setminus\gamma$, $\displaystyle\mathrm{Ind}(z,\gamma) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du$

démo. On pose $\tilde{f}(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u)-f(z)}{u-z} & \text{si } u \neq z \\ f'(z) & \text{si } u = z \end{cases}$

Alors $\tilde{f}$ holomorphe sur $\Omega\setminus\{z\}$ et continue sur Ω

donc théorème de Cauchy ⟹ $\displaystyle\int_\gamma \tilde{f} = 0 \iff \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du - \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{u-z}\,du}_{f(z)\int_\gamma \frac{du}{u-z}}$

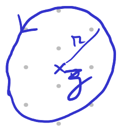
$= 2i\pi f(z)\,\mathrm{Ind}(z,\gamma)$ □

4) Conséquences

Théorème de Liouville

Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée.
Alors f constante.

démo. $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto re^{it} + z$



$\forall z,\quad f'(z) = \mathrm{Ind}(z,\gamma_r) f'(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(u)}{(u-z)^2}\, du$

$\Rightarrow \quad |f'(z)| \leq \dfrac{1}{2\pi} L(\gamma_r) \dfrac{\|f\|_\infty}{r^2} = \dfrac{\|f\|_\infty}{r} \qquad (\forall r > 0)$

$\Rightarrow \quad f'(z) = 0 \qquad (r \to \infty)$

$\Rightarrow f = \text{constante}.$ $\square$

Théorème de D'Alembert-Gauss: Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant alors P a une racine.

démo: Liouville appliqué à $\dfrac{1}{P}$ si P sans racine.

si P non constant, $\displaystyle\lim_{|z| \to \infty} |P(z)| = +\infty$

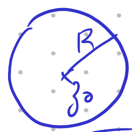
$\dfrac{1}{P}$ holomorphe (si P ne s'annule pas)

$\Rightarrow \dfrac{1}{P}$ constant $\Rightarrow P$ constant.

5) Analyticité

Théorème. Soit f holomorphe sur $D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \}$

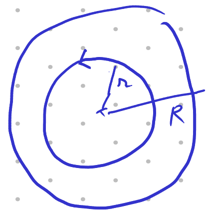
alors $\exists! \, (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,



$\forall \, 0 \leq |z - z_0| < R, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = f(z).$ $\square$

De plus, $\forall n, \quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

démo: existence si $z_0 = 0$.



soit $0 < r < R$, $\quad \gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto re^{it}$

$\underbrace{\mathrm{Ind}(z,\gamma_r)}_{=1} f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(u)}{u-z} = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(re^{it}) re^{it}}{re^{it} - z}\, dt \qquad \forall |z| < r$

$= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f(re^{it})}{1 - \frac{z}{re^{it}}}\, dt$

or $\frac{|z|}{r} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{z}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n e^{int}}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{z^n}{r^n} e^{-int}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} z^n$$

où $a_{n,r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n} e^{-int}\,dt$

Or $a_{n,r}$ ne dépend pas de r car $a_{n,r} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(\forall r)$

Donc si $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge $\forall |z| < r < R$

$\Rightarrow$ rayon $\geq R$ et $|z| < R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. □

<u>Corollaire</u> Principe des zéros isolés.

Lemme. Soit f holomorphe sur Ω ouvert connexe
Soit $a \in \Omega$ tq $\forall n$ $f^{(n)}(a) = 0$
Alors $f = 0$ sur Ω.

Contre-ex: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n$ $f^{(n)}(0) = 0$ mais $f \neq 0$.

démo du lemme.

$\Omega' = \{x \in \Omega : \forall n\ f^{(n)}(x) = 0\}$ = fermé de Ω

Remarque: (conséquence de la formule de Cauchy)

Si f holomorphe sur Ω, alors f' aussi.

$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^2}\,du$ pour un γ tq $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$

← holomorphe en z

Or Ω' ouvert car si $a \in \Omega'$, $\exists\, r > 0$ /
$\forall\, 0 \leq |z-a| < r$, $z \in \Omega$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$
et $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$
donc $\forall\, 0 \leq |z-a| < r$, $f(z) = 0$.
donc $D(a,r) \subset \Omega'$.

Donc $\Omega' = \Omega$. □

Théorème: Soit Ω ouvert connexe, $f \not\equiv 0$ holomorphe sur Ω
$f(a) = 0 \Rightarrow \exists\, r > 0$, $\forall\, 0 < |z-a| < r$, $z \in \Omega$ et $f(z) \neq 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Soit n_0 le plus petit entier tq $a_{n_0} \neq 0$.

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^{n_0} \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-n_0}}_{h(z)}$$

$h(a) = a_{n_0} \neq 0$ donc $\exists r,\ |z-a| < r \Rightarrow h(z) \neq 0$

donc $0 < |z-a| < r \Rightarrow f(z) = (z-a)^{n_0} h(z) \neq 0$. $\square$

Pause 5'.