Analyse complexe

1) Détermination principale du logarithme

Définition : Si $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $-\pi < \theta < \pi$, on note $\mathrm{Log}\, z = \ln r + i\theta \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Propriétés :
1) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $\exp(\mathrm{Log}\, z) = z$
2) $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathrm{Log}\, x = \ln x$
3) En général $\mathrm{Log}(zz') \neq \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, z'$

   Par ex. Si $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors $\mathrm{Log}(z^2) = \mathrm{Log}(e^{4i\pi/3}) = -\frac{2i\pi}{3}$
   $$\neq 2\,\mathrm{Log}\, z = \frac{4i\pi}{3}$$
4) $\forall\ |z| < 1$, $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$

Proposition : Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

démo. $\forall\ z = re^{i\theta} = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, $y \neq 0$ ou $y = 0$ et $x > 0$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad e^{i\theta} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

d'où $\forall\ x+iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathrm{Log}(x+iy) = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{P(x,y)} + \underbrace{2i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{iQ(x,y)}$

on trouve $\begin{cases} \partial_x P = \partial_y Q \\ \partial_y P = -\partial_x Q \end{cases}$

donc le critère de Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

Exercice : Calculer $\mathrm{Log}\, e^z$ si $e^z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

Proposition : $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathrm{Log}'\, z = \frac{1}{z}$

démo : $e^{\mathrm{Log}\, z} = z \Rightarrow (e^{\mathrm{Log}\, z})' = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Log}'\, z\ \underbrace{e^{\mathrm{Log}\, z}}_{z} = 1$ $\square$

Remarque Voici une autre détermination du Logarithme :
$$\widetilde{\mathrm{Log}}(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \text{si } 0 < \theta < 2\pi$$
$$\widetilde{\mathrm{Log}} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$$

---

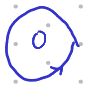
2) Intégration complexe.

Définition :
a) un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, C^1 par morceaux
b) un lacet est un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tq $\gamma(a) = \gamma(b)$

c) Si f est continue sur $\mathrm{Im}\gamma = \gamma([a,b])$, on pose

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$

Propriétés et exemple

– Si $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto e^{it}$ , $\displaystyle\int_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$

[En effet : $\gamma'(t) = ie^{it} \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} i\,e^{int} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt$

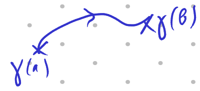
$$= \begin{cases} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq -1 \\ \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi \end{cases}\Bigg]$$

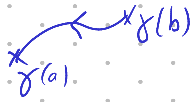
– Si f a une primitive F, $(F' = f)$

alors $\displaystyle\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

$(= 0$ si γ lacet$)$

– $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \leq \mathrm{Long}(\gamma) \sup_{\mathrm{Im}\gamma} |f|$ où $\displaystyle\mathrm{Long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

– Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ 

, on note γ_- : 

$[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto \gamma(a+b-t)$

alors $\displaystyle\int_\gamma f = -\int_{\gamma_-} f$

3) Indice

Définition. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ lacet

Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$.

on pose $\displaystyle\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$ <u>indice de γ par rapport à z_0</u>

Proposition : Soit γ lacet, Soit $z_0 \notin \mathrm{Im}\gamma$ ALORS

a) $\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) \in \mathbb{Z}$

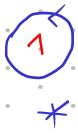
b) $\mathrm{Ind}(z,\gamma)$ constant sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$

c) $\mathrm{Ind}(z,\gamma) = 0$ si $z \in$ composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$

<u>ex</u> : si γ  $\gamma(t) = e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$, alors $\forall\, |z| > 1$, $\mathrm{Ind}(z,\gamma) = 0$

$\forall\, |z| < 1$, $\mathrm{Ind}(z,\gamma) = 1$

0



démo. $\forall\, |z| > 1$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z - z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it} - z} dt = \frac{-1}{z}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{1 - \frac{e^{it}}{z}} dt$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\left(1-\frac{e^{it}}{z}\right)' dt$$

$$= \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{z}\right) - \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{z}\right) = 0$$

* $\forall |z|<1$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}-z}$

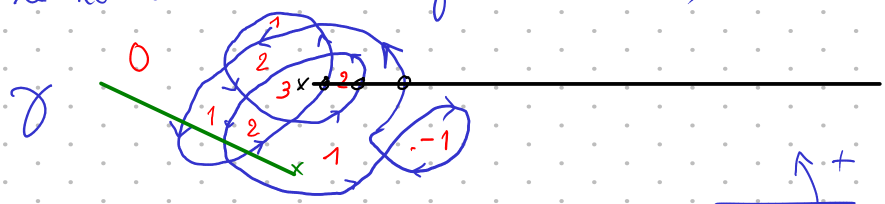
$$= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it}-z)'}{e^{it}-z}\,dt$$

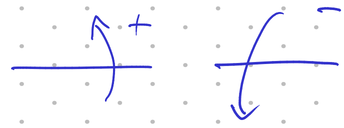
On $e^{it}-z = e^{it}(1-ze^{-it}) = e^{it}e^{\mathrm{Log}(1-ze^{-it})} = e^{f(t)}$ avec $f(t) = it + \mathrm{Log}(1-ze^{-it})$

donc $$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{f(t)})'}{e^{f(t)}}\,dt = \int_0^{2\pi} f'(t)\,dt = f(2\pi)-f(0)$$

$$= \underline{2i\pi}$$

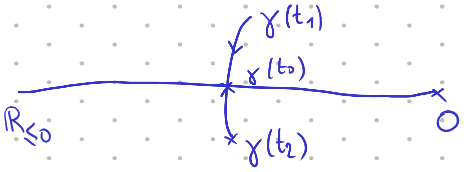
«L'indice compte le nombre de tours de γ autour de z»





Indication pour justifier « .... » :

cas où $z=0$



on suppose $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$

avec $\forall\, t_1<t<t_0$, $y(t)>0$

$\forall\, t_0<t<t_2$, $y(t)<0$

$y(t_0)=0$ et $x(t_0)<0$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{2i\pi}\int_{t_1}^{t_0-\varepsilon}\frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{1}{2i\pi}\int_{t_0+\varepsilon}^{t_2}\frac{\gamma'}{\gamma}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Log}\,\gamma(t_0-\varepsilon) - \mathrm{Log}\,\gamma(t_1) + \mathrm{Log}\,\gamma(t_2) - \mathrm{Log}(\gamma(t_0+\varepsilon))$$

$$= \mathrm{Log}\,\gamma(t_2) - \mathrm{Log}\,\gamma(t_1) + \left\{ i\pi - (-i\pi) \right. = \mathrm{Log}\,\gamma(t_2) - \mathrm{Log}\,\gamma(t_1) + 2i\pi$$

si $\gamma(t)\notin \mathbb{R}_{\leq 0}$

$$\mathrm{Log}\,\gamma(t) = \ln|\gamma(t)| + 2i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y(t)}{x(t)+\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$$ or si $t\to t_0$, $\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \sim \dfrac{-2x}{y}$

Démonstration de : $\mathrm{Ind}(z,\gamma)\in\mathbb{Z}$ $\quad(\forall z\in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}\,\gamma)$

$$\mathrm{Ind}(z,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$ si $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$

On pose $F(x) = \exp \displaystyle\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$, F dérivable et :

$\forall\ a \leq x \leq b,\quad F'(x) = \dfrac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}\, F(x)$

$$\Rightarrow \left(\frac{F(x)}{\gamma(x)-z}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow F(b) = F(a) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow \exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt\right) = 1 \Rightarrow \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

$\square$

Pause 5'.