Analyse complexe

1) Séries entières

Soit une série entière $S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\quad a_n \in \mathbb{C}$.

Définition. Le rayon de convergence de S est $R=\sup\{r\geq 0 : (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}$

Propriétés : 1) $\forall\, r<R$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge. En particulier, $\forall\, |z|<R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge

2) $R=\dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

3) si $\forall n$, $a_n \neq 0$ et si $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ alors $R=\dfrac{1}{\ell}$.

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a pour rayon 1, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ a pour rayon $+\infty$.

$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ a pour rayon 0.

Somme, produit, dérivée

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{où } \forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Remarques 1) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergent

alors $\lim_{N\infty} \sum_{k=0}^{N} c_k z^k = \lim_{N\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \cdot \lim_{N\infty} \sum_{k=0}^{N} b_k z^k$

2) si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| |z|^n < \infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z|^n$

Inverse. Soit $S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière tq $a_0 \neq 0$

on pose $b_0=\dfrac{1}{a_0}$ et $b_n=-\dfrac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1$

De plus si S a un rayon $R>0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ a aussi un rayon $\rho>0$ (*)

et $\forall\, |z|<\min\{R,\rho\}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \dfrac{1}{\lim_{N\infty} \sum_{k=0}^{N} a_n z^k}$

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ a pour rayon $+\infty$, $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n!}$ a aussi pour rayon $+\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a pour rayon 1 et $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} z^n} = 1-z$ a pour rayon $+\infty$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ a pour rayon $+\infty$ et $\dfrac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $\quad (\forall n,\ c_n \geq 0$ exo$)$

a pour rayon $\dfrac{\pi}{2}$.

(*) démo.

cas où $R=1$ $\quad \exists M>0,\ \forall n\ |a_n|\leq M$

Supposons $M=1$: $\forall n\ |a_n|\leq 1$

On pose $b_0=\frac{1}{a_0}$ et $\forall n\geq 1$ $b_n=-\frac{1}{a_0}(a_1b_{n-1}+\dots+a_{n-1}b_1)$

$$\Rightarrow |b_n|\leq \frac{|b_{n-1}|+\dots+|b_1|}{|a_0|}$$

Supposons $a_0=1$, $\forall n\ |b_n|\leq |b_{n-1}|+\dots+|b_1|$

$$\Rightarrow \forall n\ |b_n|\leq 2^n \quad (\text{réc})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ a un rayon } \geq \frac{1}{2}>0.$$

Cas général : exercice

Théorème Si $S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R>0$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon $\geq R$

et $\forall |z|<R$, $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge

et $\forall |z_0|<R$, $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in\mathbb{C}\\ z\neq z_0}} \frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} \overset{(\text{existe})}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

$$= S'(z).$$

démo Soit $\varepsilon>0$, Soit $|z_0|<r<R$ Soit N tq $\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}<\varepsilon$

$$\left|\frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right| \xrightarrow[\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}]{} 0 \quad ?$$

En effet

$$\frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\dots+z_0^{n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{N} a_n\left(z^{n-1}+\dots z_0^{n-1}\right)+\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\left(z^{n-1}+\dots+z_0^{n-1}\right)}_{\left|\ \right|\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^n \quad (|z|,|z_0|<r)}$$

Donc

$$\left|\frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right|\leq 2\varepsilon+\underbrace{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\left(z^{n-1}+\dots+z_0^{n-1}\right)-\sum_{n=1}^{N} n a_n z_0^{n-1}\right|}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} 0}$$

$<\varepsilon$

donc $\limsup\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}}\left|\frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right|=0$

$\square$

2) Fonctions holomorphes

Définition. Soit $U\subset\mathbb{C}$ ouvert. Soit $f:U\to\mathbb{C}$.

On dit que f est <u>holomorphe en $z_0 \in U$</u> si

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe dans } \mathbb{C}$$

et dans ce cas on note la $f'(z_0)$.

On dit que f est holomorphe sur U si $\forall z_0 \in U$, f est holomorphe en $z_0 \in U$.

<u>Ex.</u> - Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$, alors S est holomorphe sur

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

- un polynôme, $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Contre-exemple: $\begin{array}{l} z \mapsto \bar{z} \\ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{array}$ n'est pas holomorphe en 0

car $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0}} \frac{\bar{x}}{x} = 1 \neq \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ y \neq 0}} \frac{\overline{iy}}{iy} = -1$$

donc $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{C} \\ z \neq 0}} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas

Critère de Cauchy-Riemann.

Soit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

on pose $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec $P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Théorème : Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

ALORS f est holomorphe en $z_0 \iff P, Q$ différentiables en (x_0, y_0)

et $\begin{cases} \partial_x P(x_0,y_0) = \partial_y Q(x_0,y_0) \\ \partial_y P(x_0,y_0) = -\partial_x Q(x_0,y_0) \end{cases}$

<u>Ex.</u> si $f(z) = \bar{z}$, $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = -y$

$\partial_x P = 1 \neq \partial_y Q = -1$ $\Rightarrow f$ non holomorphe.

$\partial_y P = 0$ $\partial_x Q = 0$

$h = r + is$ $r, s \in \mathbb{R}$

<u>démo</u>: $\boxed{\Longleftarrow}$ $f(z_0 + h) = P(x_0 + r, y_0 + s) + iQ(x_0 + r, y_0 + s)$

$$= P(x_0,y_0) + \underbrace{\partial_x P \cdot r} + \partial_y P s + iQ(x_0,y_0) + i\partial_x Q r + \underbrace{i\partial_y Q s} + o(|h|)$$

$$= f(z_0) + \partial_x P \cdot h + i\partial_x Q \; h \qquad + o(|h|)$$

$$= f(z_0) + (\partial_x P + i\partial_x Q) \cdot h + o(|h|)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \partial_x P + i\partial_x Q + o(1) \quad \text{converge.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$: $f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot h + o(h)$ $\qquad h = r + is$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x_0+r, y_0+s) = P(x_0,y_0) + \alpha r - \beta s + o(\|(r,s)\|) \\ Q(x_0+r, y_0+s) = Q(x_0,y_0) + \alpha s + \beta r + o(\|(r,s)\|) \end{cases}$$

$f'(z_0) = \alpha + i\beta$

$\Rightarrow P, Q$ différentiable et $dP|_{(x_0,y_0)} : r,s \longmapsto \alpha r - \beta s \in \mathbb{R}$

$dQ|_{(x_0,y_0)} : r,s \longmapsto \alpha s + \beta r \in \mathbb{R}$

et $\partial_x P_{(x_0,y_0)} = \alpha = \partial_y Q$

$\partial_y P(x_0,y_0) = -\beta = -\partial_x Q$.

Pause = 5'.