Calcul différentiel

Sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Définition Soit $n \geq 1$
Soit $0 \leq p \leq n$
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Sont équivalentes

1°) (redressement) $\forall x \in M$, $\exists\, x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, 0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, $\exists f : U \to V$ $\mathcal{C}^k$ difféo,
$f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap V$

2°) (submersion) $\forall x \in M$, $\exists\, x \in U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$ submersion $\mathcal{C}^k$,
$U \cap M = f^{-1}(\{0\})$

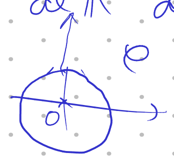
3°) (immersion) $\forall x \in M$, $\exists\, x \in U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\exists\, 0 \in V \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $\exists f : V \to \mathbb{R}^n$ immersion $\mathcal{C}^k$ en 0,
$f : V \to U \cap M$ homéomorphisme

4°) (graphe) $\forall x \in M$, $\exists\, x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, V \subset \mathbb{R}^p$ ouverts, $\exists f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$, $\mathcal{C}^k$,
$U \cap M = \{(y, f(y)) : y \in V\}$

$1° \Leftrightarrow 2° \Leftrightarrow 3° \Leftrightarrow 4°$

Dans ce cas on dit que M est une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

Exemple: $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$



> Remarque: $p=1$: courbe
> $p=2$: surface

Vérifions 2°: $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2-1 \end{array}$ submersion en (x,y) $(\forall (x,y) \in \mathcal{C})$

$n=2, p=1$

$df|_{(x,y)} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) \longmapsto 2x h_1 + 2y h_2 \end{array}$ surjective $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$= 2x\,dx + 2y\,dy$

$$\mathcal{C} = f^{-1}(\{0\})$$

$\mathcal{C}$ sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1

Vérifion 3°: $g_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (\cos(t+a), \sin(t+a)) \end{array}$ $a \in \mathbb{R}$

$\neq (0,0)$

g_a immersion car $dg_a|_0 (1) = g_a'(t) = (-\sin(t+a), \cos(t+a))$

$dg_a|_0 (h) = h(-\sin(t+a), \cos(t+a))$

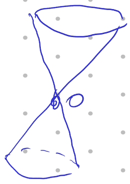
injectif $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$g_a(0) = (\cos a, \sin a)$

$g_a(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$. donc $\mathcal{C}$ sous-variété

$$g_a : \,]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathcal{C} \setminus \{(\cos a, \sin a)\} \quad \text{homéo}$$

Contre-exemple dans $\mathbb{R}^3$



$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\}$

n'est pas sous-variété de $\mathbb{R}^3$

$\left(\begin{array}{l} (x,y,z) \longmapsto x^2+y^2-z^2 \\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$ n'est pas submersion en $(0,0,0)$)

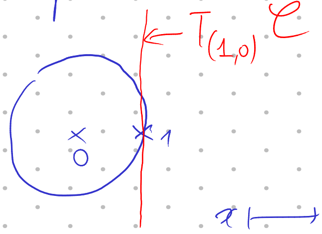
Espace tangant

Définition : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ sous-variété $\mathcal{C}^1$

$\forall x \in M$, on note $T_x M = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, c :]-\delta,\delta[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M, \\ \exists \delta > 0 \quad c(0) = x,\; c'(0) = v \end{array} \right\}$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est l'espace tangant à M en x.

ex : $\mathcal{C}$



Proposition :

a) Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ submersion
$\quad x \longmapsto 0$

Si $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$, alors $T_x M = \operatorname{Ker} df|_x$

b) Si $f : \underset{\mathbb{R}^p}{\overset{\cap}{V}} \longrightarrow U$ immersion et $f(V) = U \cap M$
$\quad 0 \longmapsto x$ et $f : V \to U \cap M$ homéo.

alors $T_x M = \operatorname{Im} df|_0$.

ex b) $x = (1,0) \in M = \mathcal{C}$, $\quad f : \,]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$
$\quad t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

$df|_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad h \longmapsto (0, h)$

$\operatorname{Im} df|_0 = \{0\} \times \mathbb{R}$

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad df|_{(1,0)} = 2dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\quad (x,y) \longmapsto x^2+y^2-1 \qquad\qquad (h_1,h_2) \mapsto 2h_1$

$M = \mathcal{C}$

$$T_{(1,0)} M = \operatorname{Ker} df|_{(1,0)} = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Théorème des extremas liés

Soient $f, g_1, \dots, g_q : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ ($U \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n$)

(U ouvert de $\mathbb{R}^n$)

Soit $X = \{g_1 = \dots = g_q = 0\} = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_q(x) = 0\}$

On suppose que $f|_X$ a un extremum local en $a \in X$

ET que $dg_1|_a, \dots, dg_q|_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont linéairement indépendantes

ALORS $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_q \;/\; df|_a = \lambda_1 dg_1|_a + \dots + \lambda_q dg_q|_a$

(les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange)

démo : $g = (g_1, \dots, g_q) : U \to \mathbb{R}^q$ submersion en $a \in U$ car

$dg|_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \quad h \mapsto (dg_1|_a(h), \dots, dg_q|_a(h))$

est surjective

Soit $v \in T_a X = dg|_a^{-1}(0) = \bigcap_{j=1}^{q} \operatorname{Ker} dg_j|_a$.

alors $\exists \delta > 0$, $\exists c :]-\delta, \delta[\to X \;/\; c(0) = a, \quad c'(0) = v$

$f \circ c$ a un extremum local en $t = 0$

$\Rightarrow (f \circ c)'(0) = 0$

$(f \circ c)'(0) = df|_a(c'(0)) = df|_a(v)$

Donc $T_a X = \bigcap_{j=1}^{q} \operatorname{Ker} dg_j|_a \subset \operatorname{Ker} df|_a$

$\Rightarrow df|_a \in \operatorname{Vect}\{dg_j|_a \mid 1 \leq j \leq q\}$ (algèbre linéaire) $\square$

Exemple (Exo) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Trouver le minimum et le maximum de f sur X.

Solution : X compact $\exists (x_0, y_0) \;/\; f(x_0, y_0) = \inf_X f$

$\exists (x_1, y_1) \;/\; f(x_1, y_1) = \sup_X f$

Si $(x_i, y_i) \in \overset{\circ}{X} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, alors $df|_{(x_i, y_i)} = 0$

$$f(x,y) = 2x^3 + y^4 \quad \text{or } df|_{(x,y)} = 6x^2\,dx + 4y^3\,dy$$

$$df|_{(x_i,y_i)} = 0 \Longrightarrow x_i = y_i = 0 \Rightarrow f(x_i,y_i) = 0$$

Mais 0 n'est pas un extremum local sur X car

$$f(\epsilon, 0) = 2\epsilon^3$$

Donc $(x_i,y_i) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 1\}$ $\quad h(x,y) = x^2+y^2-1$

or $dh|_{(x_i,y_i)} \neq 0$ donc $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ df|_{(x_i,y_i)} = \lambda\, dh|_{(x_i,y_i)}$

$$\Longrightarrow 6x_i^2\,dx + 4y_i^3\,dy = \lambda(2x_i\,dx + 2y_i\,dy)$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 6x_i^2 & 2x_i \\ 4y_i^3 & 2y_i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12x_i^2 y_i - 8x_i y_i^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_i \text{ ou } y_i = 0 \\ \text{ou } 12x_i - 8y_i^2 = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (x_i,y_i) \in \left\{(0,\pm 1), (\pm 1, 0), \left(\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

Tableau de valeurs de f :

$f(x,y) = 2x^3 + y^4$

(x,y)	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(1,0)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right)$
$f(x,y)$	1	1	-2	2	$\frac{13}{16}$

donc $\sup_X f = f(1,0) = 2 \qquad \inf_X f = f(-1,0) = -2$. $\square$

FIN DU COURS