Calcul différentiel

Théorème des fonctions implicites :

Soient E, F espaces de Banach (evn normés complets)

Soit $f : \underset{\substack{\cap \text{ ouvert} \\ E\times F}}{U} \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$ $\qquad f : (\underset{E}{x}, \underset{F}{y}) \longmapsto f(x,y)$

Soit $(a,b) \in U$ tq $f(a,b) = 0$

On suppose : $D_y f_{|(a,b)} : F \longrightarrow F$ homéomorphisme (linéaire)

$$y \longmapsto f(a,y)$$
$$F \longrightarrow F$$

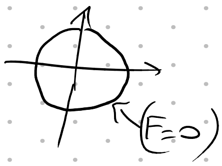
ALORS $\exists$ $(a,b) \in \underset{\text{ouvert}}{W} \subset U$, $a \in \underset{\text{ouvert}}{V} \subset E$ et $\varphi : V \to F$ $\mathcal{C}^1$,

$$\forall (x,y) \in W, \quad f(x,y) = 0 \iff x \in V \text{ et } y = \varphi(x).$$

$[\{(x,y) \in W : f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in V\}$

<u>Ex:</u> $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ <u>$F\ \mathcal{C}^1$</u>

$$(x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$$



$$\partial_y F(x,y) = 2y$$

en $(0,1)$ $\qquad \partial_y F(0,1) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \longmapsto 2h$ $\quad$ (homéo / iso) $^{\text{iso}}$morphisme

$\exists W \ni (0,1)$, $\quad (x,y) \in W$ et $x^2 + y^2 = 1 \iff y_{(x)} = \sqrt{1 - x^2}$

par ex : $]-1,1[\times \mathbb{R}_+^*$

en $(1,0)$ $\qquad \partial_y F(1,0) = 0 \qquad\qquad \partial_x F(1,0) = 2 \neq 0$

$$(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times]-1,1[\; F(x,y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1 \iff x = \sqrt{1-y}$$

<u>démo du théorème :</u>

On pose $\quad \psi(x,y) = (x, f(x,y))$

$$\psi : \underset{E}{U}_{F} \longrightarrow E \times F$$

$$D\psi_{|(a,b)} = \left(\begin{array}{c|c} Id_E & 0 \\ \hline D_x f & D_y f_{|(a,b)} \end{array}\right) \begin{array}{l} \}E \\ \}F \end{array} \qquad E\times F \xrightarrow{\sim} E \times F \text{ isomorphisme (et homéo)}$$

Donc d'après le théorème d'inversion locale, $\exists (a,b) \in W$, $\psi : W \to \psi(W)$ C^1 difféo

$$\psi^{-1}: \psi(W) \longrightarrow W$$
$$(X,Y) \longmapsto \big(\underbrace{(\psi^{-1})_1(X,Y)}_{\in E}, \underbrace{(\psi^{-1})_2(X,Y)}_{\in F}\big)$$

Alors $(x,y)\in W$ et $f(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y)\in W$ et $\psi(x,y)=(x,f(x,y))$
$$=(x,0)$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in W \text{ et } y=(\psi^{-1})_2(x,0)$$

On pose $V\subset E$ tq $V\times\{0\}=\psi(W)\cap E\times\{0\}$

d'où si $(x,y)\in W$ $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x\in V$ et $y=\underbrace{(\psi^{-1})_2(x,0)}_{=:\varphi(x)}$ $\square$

<u>Exemples.</u>

0) $x^2+y^2=1$ et $|x|<1$ et $y>0 \Rightarrow y=y(x)=\sqrt{1-x^2}$

$\forall x,\ x^2+y(x)^2=1 \Rightarrow 2x+2y(x)y'(x)=0 \quad (*)$
$$\Rightarrow y'(0)=0$$

On dérive $(*)$: $2+2y'(x)^2+2y(x)y''(x)=0$
$$\Rightarrow 2+2y'(0)^2+2y(0)y''(0)=0$$
$$\Rightarrow y''(0)=-1.$$
etc.

1) $(S)\begin{cases}4xy+2x+y+4y^2=0\\ x^3y+xz+4z-z^2=0\end{cases}$ Soit $F(x,y,z)=\begin{pmatrix}4xy+2x+y+4y^2\\ x^3y+xz+4z-z^2\end{pmatrix}$

$$D_{y,z}F|_{(0,0,0)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$ isomorphisme

Donc $\exists\ \underset{(0,0,0)}{W\ni}\subset\mathbb{R}^3$, $\exists\ \varphi: \underset{0}{V\ni}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall(x,y,z)\in W$, $F(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x\in V,\ y=y(x), z=z(x)$

On peut calculer $y'(0), z'(0)$.

En effet « On dérive (S) par rapport à x »

$\forall x\in V \begin{cases}4y(x)+4xy'(x)+2+y'(x)+8y(x)y'(x)=0\\ 3x^2y(x)+x^3y'(x)+z(x)+xz'(x)+4z'(x)-2z(x)z'(x)=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}2+y'(0)=0\\ 4z'(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y'(0)=-2\\ z'(0)=0\end{cases}$ On peut trouver de même $y''(0), z''(0)$.

En revanche, on ne peut pas exprimer x, y en fonction de z avec le théorème

car $D_{x,y}F|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non isomorphisme.

e) $F(x,y,z) = 2xy - z + 2xz^3$

On peut Exprimer $\underbrace{\text{les solutions}}_{\text{de } F(x,y,z)=5}$ en fonction de (x,y) au voisinage de $(1,2,1)$.

et calculer $\partial_x\partial_y z(1,2)$.

$$\boxed{F = 2xy - z + 2xz^3}$$

$$D_z F|_{(1,2,1)} = -1 + 8 = 7 \neq 0$$

$$F(x,y,z) = 5 \Leftrightarrow z = z(x,y)$$

$$\Rightarrow (*) F(x,y,z(x,y)) = 5 \Rightarrow \partial_x F(1,2,1) + \partial_z F(1,2,1)\, \partial_x z(1,2) = 0$$

$$\Rightarrow 20 + 5\partial_x z(1,2) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_x z(1,2) = -4$$

$$\partial_y F(1,2,1) + \partial_z F(1,2,1)\, \partial_y z(1,2) = 2 + 5\partial_y z(1,2) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_y z(1,2) = -\frac{2}{5}$$

(*) dérivée par rapport à y: $2x + (-1+6xz^2)\partial_y z = 0$

$$\Rightarrow \partial_y z = \frac{-2x}{6xz^2-1}$$

$$\Rightarrow \partial_x\partial_y z = \frac{-2(6xz^2-1) - (6z^2 + 12xz\,\partial_x z)}{(6xz^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \partial_x\partial_y z(1,2) = \frac{-10 - (6+12\times(-4))}{(6-1)^2} = \frac{32}{5^2}\ \boxed{= \frac{32}{25}}$$

Pause 5'