Calcul différentiel

Continuité des dérivées partielles

Théorème Soit $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert). Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose $\forall 1 \leq i \leq n$, $\partial_{x_i} f$ existe et est continue en $a \in U$

ALORS f est différentiable en $a \in U$

de plus $\forall h = (h_1, \dots, h_n)$, $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(a)\, h_i$ $\square$

Théorème des accroissements finis

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$, $\Omega \subset E$ evn (ouvert), F evn

on suppose que f différentiable sur Ω.

ALORS si $a, b \in \Omega$, $\boxed{\|f(b) - f(a)\|_F \leq \|b-a\|_E \sup_{x \in [a,b]} |||df(x)|||_{\mathcal{L}(E,F)}}$

[Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, $|||\varphi|||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|\varphi(x)\|_F$]

$\forall x \in E$, $\|\varphi(x)\|_F \leq |||\varphi|||_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E$.

__démo__ $[a,b] = \{a + t(b-a) : 0 \leq t \leq 1\}$ Soit $\varepsilon > 0$, $M = \sup_{x \in [a,b]} |||df(x)|||$

$$K = \left\{ 0 \leq s \leq 1 : \forall\, 0 \leq t \leq s, \|f(a + t(b-a)) - f(a)\| \leq t\|b-a\|(M+\varepsilon) \right\}$$

$\xi := \sup K$.

· $0 \in K$, donc $K \neq \emptyset$

Si $\xi = 1$, alors $\forall t < 1$, $\|f(a+t(b-a)) - f(a)\| \leq t\|b-a\|(M+\varepsilon)$

$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\|(M+\varepsilon)$

Si $\xi < 1$.

$\|f(a + \xi(b-a)) - f(a)\| \leq \xi\|b-a\|(M+\varepsilon)$

$$f(a + (\xi+t)(b-a)) = f(a + \xi(b-a)) + \underbrace{t\, df(a+\xi(b-a))(b-a) + o(t)}$$

$\|\quad\| \leq M|t|\|b-a\| + |t|\varepsilon\|b-a\|$ $\forall |t| < \eta$

(pour un certain $\eta > 0$)

$\Rightarrow \| f(a+(\xi+t)(b-a)) - f(a+\xi(b-a)) \| \leq (M+\varepsilon)|t| \|b-a\| \quad \forall |t|<\eta$

$\Rightarrow \| f(a+(\xi+t)(b-a)) - f(a) \| \leq (M+\varepsilon)\left(|t| \|b-a\| + \xi \|b-a\|\right)$

$\leq (M+\varepsilon)(t+\xi)\|b-a\| \quad \forall\ 0<t<\eta$

$\Rightarrow \| f(a+z(b-a)) - f(a) \| \leq (M+\varepsilon)|z| \|b-a\| \quad \forall\ z<\xi+\eta$

contredit maximalité de ξ. $\square$

<u>Remarque</u> Pas d'égalité des accroissements finis si $\dim F > 1$

Contre-ex : $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\forall t, \quad f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \|f'(t)\|_2 = 1$$

Il n'existe pas en général $t_1 \leq s \leq t_2$ tq $f(t_1) - f(t_2) = (t_1 - t_2) f'(s)$.

Par ex : $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq 2\pi f'(s) \quad (\forall s)$ $\square$

Théorème de Schwarz

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert <u>$\mathcal{C}^1$</u>

On suppose que $a \in \Omega$, et $\forall i,j$ $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f$ existent et sont continues au voisinage de a

Alors $\forall 1 \leq i,j \leq n$, $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(a) = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(a)$.

<u>contre-exemple</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$\partial_x \partial_y f(0,0) = \ ?$

$\forall x \quad \partial_y f(x,0) = \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} \dfrac{f(x,y)}{y} = \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$

donc $\underline{\partial_x(\partial_y f(0,0)) = 0}$.

$\forall y\neq 0, \ \partial_x f(0,y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)' \Big|_{x=0} = y \cos\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{x=0} = y$

$\partial_x f(0,0) = 0$

donc $\forall y \quad \partial_x f(0,y) = y \quad \Rightarrow \partial_y(\partial_x f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial_x f(0,y)}{y} = \underline{1}$

démo du théorème

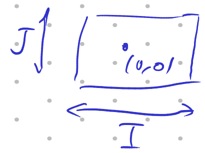
Lemme Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

on suppose que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L$ existe

Si $\forall y$, $\lim_{x\to 0} F(x,y) = g(y)$ existe.

alors $\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} F(x,y) = L$.

démo: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists$ $\underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{I}$, $\underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{J}$ intervalles ouverts,



$\forall (x,y) \in I\times J$, $F(x,y) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

alors $\forall y \in J \quad L-\varepsilon \leq g(y) \leq L+\varepsilon$

$\Rightarrow \quad \lim_{y\to 0} g = L$. $\square$

Application du lemme. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $\partial_x\partial_y f$, $\partial_y\partial_x f$ continues en $0 \in \mathbb{R}^2$

On pose $F(h,k) = \frac{1}{h}\Big(\underbrace{\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} - \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}}_{\text{continue dérivable en } k}\Big)$

d'après égalité des accroissements finis :

$$F(h,k) = \frac{1}{h}\left(\partial_y f(h,t_k) - \partial_y f(0,t_k)\right)$$

pour certains $0 < t_k < k$

$$= \partial_x\partial_y f(s_h, t_k) \quad \text{pour un } 0 < s_h < h$$

$$\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \partial_x\partial_y f(0,0)$$

Or $\forall k$, $\lim_{h\to 0} F(h,k) = \frac{1}{k}\left(\partial_x f(0,k) - \partial_x f(0,0)\right)$ car $F(h,k) = \frac{1}{k}\left(\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} - \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} F(h,k) = \partial_y\partial_x f(0,0) = \partial_x\partial_y f(0,0).$$

Formule de Taylor à l'ordre 2.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$, alors

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + D^2f(a)(h,h) + o(\|h\|^2)$$

pour $h \in \mathbb{R}^n$ $\qquad df : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

où $D^2f(a)(h,k) = d(df(a))(h)(k)$.

démo : Inégalité des accroissements finis à df.

Application : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$

Si f a un $\begin{cases}\text{minimum}\\ \text{maximum}\end{cases}$ local en a, alors $df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est $\begin{cases}\text{positive}\\ \text{négative}\end{cases}$

Si $df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est définie $\begin{cases}\text{positive}\\ \text{négative}\end{cases}$, alors f a un $\begin{cases}\text{minimum}\\ \text{positive}\end{cases}$ local en a.

Ex : Trouver les extremums locaux de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Prochain cours le 26 février