1 Calcul différentiel

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour simplifier la notation, on ne mettra pas d'indiceà la norme $\|\cdot\|$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ on utilisera toujours la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. *Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire et continue $L : E \to F$ telle que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \qquad \text{quand } h \to 0.$$

(On a utilisé la notation habituelle $X = o(\|h\|)$ ssi $\frac{X}{\|h\|} \to 0$ quand $h \to 0$.)

Remarques.

a) Pour pouvoir étudier la différentiabilité d'une fonction en un point il faut que la fonction soit définie au voisinage de ce point.

b) La notion de différentiabilité ne change pas quand on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes.

c) En dimension finie le théorème de Riesz affirme que toutes les normes sont équivalentes. Par conséquent, si E et F sont de dimension finie alors la notion de différentiabilité ne change pas quand on change les normes de E et F.

d) En dimension finie, il est également vrai que toutes les applications linéaires sont continues. On n'a donc pas à se soucier de la continuité de L dans la définition de différentiabilité.

Proposition 1.2. *L'application linéaire et continue L qui apparaît dans la définition 1.1 est unique. On appelle L la différentielle de f au point a et on note $L = Df(a)$ ou encore $L = f'(a)$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion avec la dérivée usuelle.*

Proposition 1.3. *Une fonction différentiable en a est continue en a.*

Proposition 1.4. *Si $E = F = \mathbb{R}$, alors une fonction f est différentiable en un point a si et seulement si elle est dérivable. De plus, la différentielle $Df(a)$ est l'application linéaire et continue donnée par la multiplication par la dérivée $f'(a)$:*

$$Df(a)(h) = hf'(a).$$

Exemples.

a) Toute application linéaire et continue entre deux espaces normés est différentiable en tout point et sa différentielle en un point arbitraire est elle-même.

b) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2$ est différentiable en tout point et sa différentielle est donnée par

$$Df(a)(h) = a_1 h_2 + a_2 h_1.$$

c) Soient E_1, E_2 et F des espaces normés, $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire et continue (*i.e.* $\|B(x_1, x_2)\| \leq C\|x_1\|\|x_2\|$). Alors B est différentiable en tout point et $DB(a)(h) = B(a_1, h_2) + B(h_1, a_2)$.

d) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'application $T : E \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f^2$ est partout différentiable et $DT(f)(h) = 2\int_0^1 fh$.

Calcul différentiel

E, F espaces vectoriels normés

$f : U \longrightarrow F$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe $df_{(a)} : E \longrightarrow F$ linéaire continue (si E, F de dimensions finies, linéaire $\Rightarrow$ continue) tq :

$$f(a+h) = f(a) + df_{(a)}(h) + o(\|h\|)$$

$\left[o(\|h\|) = \|h\| \, \varepsilon(h) \right.$ avec $\left. \lim\limits_{\|h\| \to 0} \|\varepsilon(h)\| = 0 \right]$

c'à-d, $\exists \, \varepsilon > 0$, $\forall \|h\| < \varepsilon$, $a+h \in U$

et $\dfrac{f(a+h) - f(a) - df_{(a)}(h)}{\|h\|} \underset{\|h\| \to 0}{\longrightarrow} 0$

Définition. $df_{(a)}$ différentielle de f en a.

Exemples.

si $E = F = \mathbb{R}$

f différentiable en a

$\Leftrightarrow f$ dérivable en a

et $df_{(a)}(h) = f'(a) h$

Remarque. $\dim E < \infty$ et $\dim F < \infty$

toutes les normes sont équivalentes

($\forall \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normes sur E

$\exists \, \alpha > 0, \beta > 0$

$\forall x \in E \quad \alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$)

Exemples. 0) Si f linéaire, continue, f est différentiable en tout point. $\forall a, \; df_{(a)} = f$

1) $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$M \longmapsto M^2$

est différentiable.

Soit $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{R}^n$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \; |||M||| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Mx\|$

Pour $|||\cdot|||$: $\forall M_1, M_2, \quad |||M_1 M_2||| \leq |||M_1||| \, |||M_2|||$

$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad (M+H)^2 = M^2 + \underbrace{HM + MH}_{\text{linéaire en } H} + H^2$

$$\text{et } |||H^2||| \leq |||H|||^2 = o(|||H|||)$$

donc $\underbrace{\forall M, df_{(M)}}_{f \text{ différentiable et}} (H) = HM + MH$.

3) $\quad g : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$\qquad M \longmapsto M^{-1}$

g est différentiable sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et $dg_{|M}(H) = \ ?$

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, soit H,

$$M + H = M(I_n + M^{-1}H)$$

si $|||M^{-1}H||| < 1$, alors $(I_n + M^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-M^{-1}H)^k$

donc $|||H||| < \dfrac{1}{|||M^{-1}|||} \Rightarrow$

$$(M+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-M^{-1}H)^k M^{-1}$$

$$= M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (M^{-1}H)^k M^{-1}}$$

$|||\cdot||| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |||H|||^k \, |||M^{-1}|||^2$

$= |||M^{-1}|||^2 \dfrac{|||H|||^2}{1 - |||H|||} = o(|||H|||)$

(si $|||H||| < 1$)

donc $dg_{|M}(H) = -M^{-1}HM^{-1}$

Nous avons que la composition de deux applications différentiables est différentiable et la différentielle de la composition est la composition des différentielles.

Proposition 1.5. *Soient E, F et G trois espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to F$ et $g : V \to G$. On suppose que f est différentiable en $a \in U$, que $f(a) \in V$ et que g est différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Remarque. Cet énoncé concernant la composition peut être utilisé avec l'exemple b) ci-dessus pour prouver que le produit de deux fonctions différentiables (à valeur dans $\mathbb{R}$) est aussi différentiable et retrouver la formule usuelle pour sa différentielle. D'autre part, la somme de deux fonctions différentiables (à valeur dans un même espace vectoriel normé arbitraire) est aussi différentiable et sa difféntielle est la somme des deux difféntielles, ce qui prouve qu'on peut finalement traiter toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles.

Définition 1.6. *Soit U un ouvert de E, $a \in U$, $v \in E$* $\neq 0$ *et $f : U \to F$. On dit que f admet au point a une dérivée directionnelle dans la direction v, et on la note par $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, si la limite suivante existe :*

$$\partial_v f(a) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(a + \varepsilon v) - f(a)}{\varepsilon}. = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{f(a+\varepsilon v) - f(a)}{\varepsilon}$$

En d'autres termes, la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ est la dérivéeà droite en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + tv)$.

Proposition 1.7. *Si f est différentiable en a alors f admet des dérivées directionnelles en a suivant toute direction et nous avons de plus que*

démo : $\frac{f(a+\varepsilon v) - f(a)}{\varepsilon} = \frac{df(a)(\varepsilon v) + o(\|\varepsilon v\|)}{\varepsilon} = df(a)(v) + o(1) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} df(a)(v)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v).$$

Exemples.

a) L'existence des dérivées directionnelles suivant toute direction n'entraîne pas forcément la différentiabilité de la fonction. Ni même la continuité. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées directionnelles en 0 qui sont nulles en toute direction. Mais f n'est pas continue en 0, et *a fortiori* n'est pas différentiable en 0.

b) Même si la fonction est continue et que toutes ses dérivées directionnelles existent en un point cela n'implique toujours pas que la fonction est différentiable. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}}$$

est continue en 0 et toutes ses dérivées directionnelles en 0 existent :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Elle n'est cependant pas différentiable en 0 car les dérivées directionnelles en 0 ne sont pas linéaires en v.

$$f(x,y) = \frac{x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2}$$

Soit $v=(a_1,a_2) \neq 0$

$$\underbrace{f((0,0)+\varepsilon(a_1,a_2))}_{\substack{\shortparallel \\ f(\varepsilon a_1,\varepsilon a_2)}} = \frac{(\varepsilon a_1)\left((\varepsilon a_1)^2 - 3\varepsilon^2 a_2^2\right)}{\varepsilon^2(a_1^2+a_2^2)}$$

$\varepsilon > 0$

$$= \frac{\varepsilon a_1(a_1^2-3a_2^2)}{a_1^2+a_2^2}$$

$$\frac{f(\varepsilon a_1,\varepsilon a_2)-f(0,0)}{\varepsilon} = \frac{a_1(a_1^2-3a_2^2)}{a_1^2+a_2^2} = \partial_v f(0,0)$$

NON LINÉAIRE en (a_1,a_2) $\Rightarrow$ NON différentiable

1.2 Le cas de la dimension finie

On passe maintenant au cas de la dimension finie. Plus précisément, on suppose dans cette partie que E est de dimension finie : $E = \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Dérivées partielles

Définition 1.8. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to F$. On dit que f admet au point a une dérivée partielle par rapportà la variable x_j si la fonction suivante*

$$t \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

est dérivable en $t = a_j$. Sa dérivée partielle par rapportà la variable x_j est la valeur de cette dérivée, et on la note par $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Ainsi, cette dérivée partielle est également donnée par la limite suivante (si elle existe, sinon la fonction f n'admet pas de dérivée partielle) :

$e_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, 0 \cdots 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_{e_j} f(a) = \partial_{x_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a + \varepsilon e_j) - f(a)}{\varepsilon}$$

où on a noté par e_j le j-ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: toutes les composantes de e_j sont nulles sauf la j-ème qui est égaleà 1.

La différentielle peut s'exprimer en fonction des dérivées partielles de la manière suivante.

Proposition 1.9. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to F$ une fonction différentiable en a. Alors*

$$Df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

On peut se demander quelle est la relation entre dérivées partielles et dérivées directionnelles et si l'existence des unes implique l'existence des autres. On remarque d'abord que les dérivées directionnelles concernent toutes les directions, et pas seulement celles des axes coordonnés. On pourrait donc penser que l'existence de toutes les dérivées directionnelles implique celles de toutes les dérivées partielles, mais ce n'est pas le cas à cause d'une subtilité : les dérivées directionnelles ne sont pas définies comme une limite pour $\varepsilon \to 0$, mais seulement d'un côté ($\varepsilon \to 0^+$) ; elles correspondent donc à une dérivée droite ou gauche seulement ; il serait donc possible que la restriction d'une fonction aux axes cordonnées passant par un point admette des dérivées droite et gauche mais différentes, et donc pas de dérivée tout court. On peut considérer les deux exemples suivants.

Exemples.

a) L'existence des dérivées directionnelles suivant toute direction n'entraîne pas forcément celle des dérivées partielles. La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) := ||x||$ (en utlisant, par exemple, la norme euclidienne) admet des dérivées directionnelles en $a = 0$ données par $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = ||v||$ mais chaque fonction $t \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ coïncide avec $|t|$ et n'est donc pas érivable en $t = 0 = a_j$.

b) L'existence des dérivées partielles n'entraine pas non plus celle des dérivées directionnelles, comme on peut voir dans l'exemple suivant d'une fontion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

Comme la restriction de f à chaque axe cordonnée passant par l'orogine $a = (0, 0)$ est la fonction nulle, les dérivées partielles existent et sont nulles. D'autre part, si on prend un vecteur v qui n'est pas orienté comme les axes (par exemple $v = (1, 1)$) on a $f(a + \varepsilon v) = 1$ et $f(a) = 0$, ce qui entraine que la limite définissant $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ vaut $+\infty$ et la fonction n'admet donc pas de dérivées dirctionnells sauf pour certains v.

1.2.2 Matrice jacobienne et gradient

Supposons maintenant que F est lui aussi de dimension finie : $F = \mathbb{R}^m$. Une fonction f à valeurs dans F admet m composantes

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Comme la limite dans $\mathbb{R}^m$ se fait composante par composante et que les dérivées partielles sont définies via une limite, nous avons que f admet des dérivées partielles ssi chaque composante de f admet des dérivées partielles et la dérivée partielle de f s'obtient en prenant les dérivées partielles des composantes.

La différentielle est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Elle s'identifie doncà une matrice. On peut exprimer cette matrice en fonction des dérivées partielles des composantes de f.

Proposition 1.10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en a. La matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est donnée par la matrice suivante*

$$M_f(a) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\Big)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

On appelle cette matrice la matrice jacobienne en a.

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peut aussi être vue comme une fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Nous avons alors deux notions de différentiabilité. D'une part la notion de différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et d'autre part la notion de différentiabilité sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Ces deux notions sont-elles les mêmes ? La réponse est non. Plus précisément, la $\mathbb{C}$ différentiabilité implique la $\mathbb{R}$ différentiabilité mais la réciproque est fausse. Cela vient du fait qu'une application linéaire sur $\mathbb{C}$ est aussi linéaire sur $\mathbb{R}^2$ mais une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ ne l'est pas forcément sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.11. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a. On appelle gradient de f en a le vecteur ligne*

$$\nabla f(a) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\big).$$

Le gradient coïncide avec la matrice jacobienne. On peut facilement voir que le gradient est la direction où f augmente le plus vite.

1.2.3 Continuité des dérivées partielles et différentiabilité

Le critère le plus important pour la différentiabilité d'une fonction est celui de la continuité des dérivées partielles.

Théorème 1.12. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. On suppose que les dérivées partielles de f existent dans un voisinage de a et sont continues en a. Alors f est différentiable en a.*

Si la continuité des dérivées partielles est une condition suffisante de différentiabilité, ce n'est pas une condition nécessaire (seule l'existence des dérivées partielles est une condition nécessaire). En pratique, lorsqu'on veut décider de la différentiabilité d'une fonction concrète (qui a en général des points de singularité) on peut procéder de la manière suivante :

Composée

E, F, G ev.

Prop. Si $g : \underset{E}{U} \longrightarrow \underset{F}{V}$, $f : \underset{F}{V} \longrightarrow \underset{G}{W}$

Si g différentiable en $a \in U$

Si f différentiable en $g(a) \in V$, alors

$f \circ g$ différentiable en $a \in U$ et :

$$d(f \circ g)_{(a)} = df_{(g(a))} \circ dg_{(a)} : E \longrightarrow G$$

En particulier : $Jac(f \circ g)_{(a)} = Jac(f)_{(g(a))} \cdot Jac(g)_{a}$.