Analyse fonctionnelle

1) Coefficients de Fourier

définition : Soit $f \in L^1(]0,2\pi[)$

on pose $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$

et $e_n(x) = e^{inx}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$

2) Espace de Hilbert $L^2(]0,2\pi[)$

$\forall f,g \in L^2(]0,2\pi[)$, $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}$

Prop : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée

$$\forall m,n, \quad \langle e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } n = m \\ \frac{1}{2i\pi(n-m)}\left[e^{i(n-m)x}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$$

Théorème de Fatou et égalité de Parseval :

1) $\forall f \in L^2(]0,2\pi[)$, $\lim\limits_{\substack{N\to+\infty \\ M\to+\infty}} \sum_{k=-N}^{M} c_k(f)e_k \underset{L^2}{=} f$

c-à-d : $\lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \left\| f - \sum_{k=-N}^{M} c_k(f)e_k \right\|_{L^2} = 0$

2) $\forall f \in L^2(]0,2\pi[)$, $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$

démo : 1) $\Longrightarrow$ 2)

Notons $S_{N,M}(f) = \sum_{k=-N}^{M} c_k(f)e_k$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|\underbrace{f - S_{N,M}(f)}_{\in \mathrm{Vect}\{e_k : -N\le k\le M\}^\perp} + \underbrace{S_{N,M}(f)}_{\in \mathrm{Vect}\{e_k : -N\le k\le M\}}\|_{L^2} = \underbrace{\|f - S_{N,M}(f)\|_{L^2}^2}_{\xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|S_{N,M}(f)\|_{L^2}^2}_{=\sum_{k=-N}^{M}|c_k(f)|^2}$$

$\square$

démo du 1) Soit $\varepsilon > 0$ $\quad \exists\, g \in C_c^0(]0,2\pi[)$, $\|f-g\|_{L^2} < \varepsilon$ (convolution)

$$f - S_{N,M}(f) = f - g + g - S_{N,M}(g) + S_{N,M}(g) - S_{N,M}(f)$$

$$\Rightarrow \| f - S_{N,M}(f)\|_{L^2} \leq \|f-g\|_{L^2} + \|g - S_{N,M}(g)\|_{L^2} + \underbrace{\|S_{N,M}(g-f)\|_{L^2}}_{\leq \|g-f\|_{L^2}}$$

$$\leq 2\varepsilon + \|g - S_{N,M}(g)\|_{L^2}$$

or g se prolonge en $\tilde{g}$ C^0 2π-périodique sur $\mathbb{R}$

Or (admis) il existe P polynôme trigonométrique ($P \in \mathrm{Vect}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$) tq $\| P - g\|_\infty < \varepsilon$.

Or $\|g - S_{N,M}(g)\|_{L^2} \leq \underbrace{2\|g-P\|_\infty}_{< 2\varepsilon} + \|P - S_{N,M}(P)\|_{L^2}$

si $P = \sum_{k=-\alpha}^{\beta} p_k e_k$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$P = S_{N,M}(P) \quad \forall N \geq \alpha, \forall M \geq \beta$$

donc $\| f - S_{N,M}(f)\|_{L^2} < 4\varepsilon \quad (\forall N \geq \alpha, \forall M \geq \beta)$

$\square$

<u>Proposition</u> : Si f 2π-périodique $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x))$
Si $f \in L^1(]0,2\pi[)$, alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(]a, a+2\pi[)$ et

$$\int_a^{a+2\pi} f = \int_0^{2\pi} f.$$

<u>démo</u> : (si $a \geq 0$) $\displaystyle\int_0^{a+2\pi} f = \cancel{\int_0^a f} + \int_a^{a+2\pi} f$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f \underset{t = x - 2\pi}{=} \int_0^{2\pi} f + \cancel{\int_0^a f}$$

$$\Rightarrow \int_a^{a+2\pi} f = \int_0^{2\pi} f. \qquad \square$$

<u>Lemme de Riemann-Lebesgue</u>

$$\forall f \in L^1(]0,2\pi[), \quad \lim_{|n| \to \infty} c_n(f) = 0$$

<u>démo</u> . si $f = \chi_{]a,b[}$ $0 < a < b < 2\pi$.

alors $c_n(f) = \int_a^b f(x) e^{-inx} dx$

$$= \int_a^b e^{-inx} dx = -\frac{1}{in}\left[e^{-inx}\right]_a^b \qquad (n \neq 0)$$

$$= \frac{e^{-inb} - e^{-ina}}{in} \xrightarrow[|n| \to \infty]{} 0$$

Si $f \in L^1(]0,2\pi[)$, si $\varepsilon > 0$, $\exists h$ fonction en escaliers (combi. linéaire finie de fonctions caractéristique d'intervalles)

$\|f - h\|_{L^1} < \varepsilon$

Alors $c_n(f) = \underbrace{c_n(f-h)}_{|c_n(f-h)| \leq \|f-h\|_{L^1}} + \underbrace{c_n(h)}_{\xrightarrow[|n|\infty]{} 0}$

$$\Rightarrow \limsup_{|n| \infty} |c_n(f)| \leq \varepsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{|n| \infty} |c_n(f)| = 0 .$$

2) Noyau de Dirichlet.

définition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$

Propriétés : a) D_n 2π-périodique

b) $\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\forall x \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = 2n+1$

c) $\int_0^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{0} D_n = \pi .$

démo : b) si $e^{ix} \neq 1$, $D_n(x) = e^{-inx} \frac{1 - e^{(2n+1)ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{\cancel{e^{-inx}}\, \cancel{e}^{i\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}}{\cancel{e^{ix/2}}} \frac{e^{-i\left(\frac{2n+1}{2}\right)x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{ix/2}}$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} .$$

c) $\int_0^{\pi} D_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{\pi} e^{ikx} dx = \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \frac{1}{ik}\left[e^{ikx}\right]_0^{\pi} + \pi$

$$= \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{1}{ik}\left[e^{ik\pi} - 1\right] + \pi$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(e^{ik\pi} - 1)}{ik} - \frac{(e^{-ik\pi} - 1)}{ik} \right)}_{0} + \pi .$$

Théorème de Dirichlet :

on pose $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$

Si f $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]0,2\pi[$, alors $\forall x \in]0,2\pi[$,

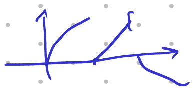
$$\lim_{n\infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

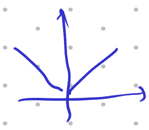
où $f(x^+) = \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} f(y)$, $f(x^-) = \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} f(y)$.

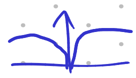
<u>Rappel</u> : f C^1 par morceaux signifie :

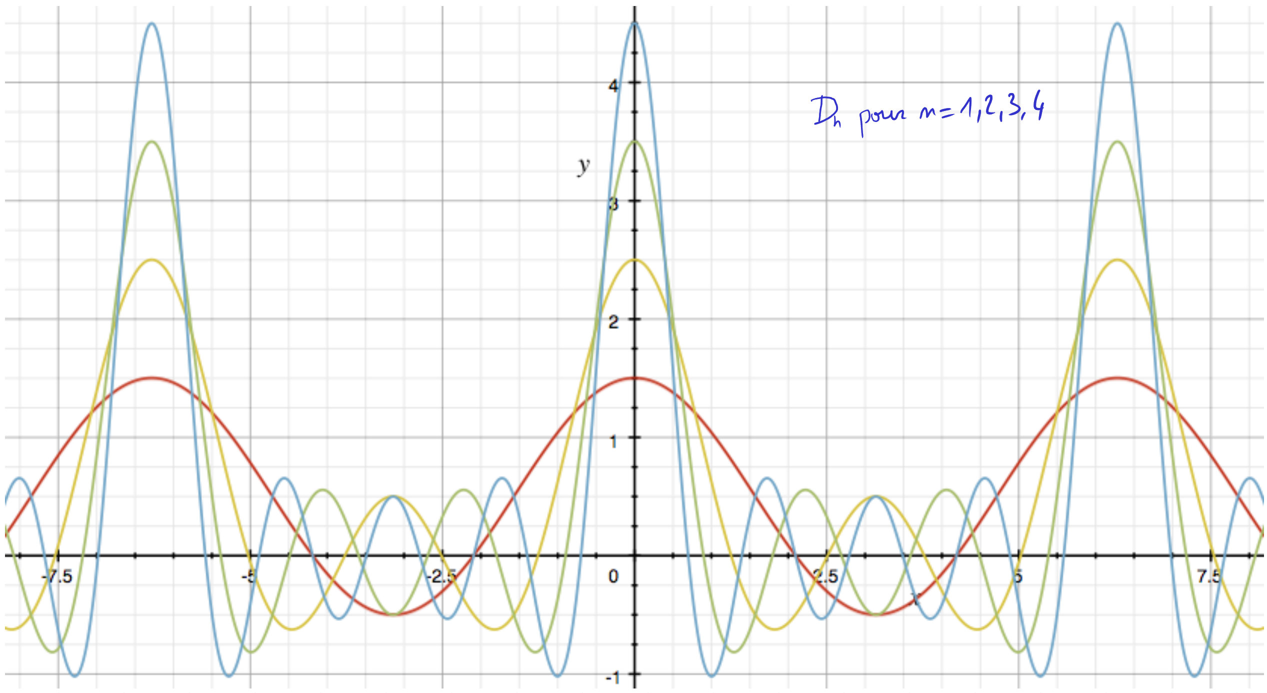
$\exists \quad 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N < a_{N+1} = 2\pi$,

$\forall k,\ \exists f_k : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$, $f_k|_{]a_k,a_{k+1}[} = f$.

ex  C^1 par morceaux

$f(x) = |x|$ est C^1 par morceaux 

$f(x) = \sqrt{|x|}$ non C^1 par morceaux 



Fin du cours

Prochain cours le 13 avril