Analyse fonctionnelle

Espaces de Hilbert

Ex : 1) $\ell_2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

2) $L_2([0,2\pi]) = \left\{ f : \int_0^{2\pi} f^2 < \infty \right\}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg.$$

Définition : Soit H un espace vectoriel réel avec un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.
et tq $(H, \|\cdot\|)$ est un evn complet (Banach)
$(\forall h, \|h\| = \sqrt{\langle h,h \rangle})$

1) Distance à un convexe fermé
$(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ de Hilbert

Proposition : Soit $C \subset H$ convexe et fermé
$\forall x \in H, \exists !\, y \in C$ tq $\|x-y\| = \inf_{z \in C} \|x-z\| = d(x,C)$

Notation : $y = p_C(x)$

démo. existence : Soit $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ tq $\lim_{n\infty} \|x-y_n\| = d(x,C)$

Alors $(y_n)_n$ de Cauchy. en effet.

(parallélogramme) $\forall u, v \in H$, $\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

$$\|y_n - y_m\|^2 = -\|y_n + y_m - 2x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2$$

$$= 4\Big(\underbrace{\frac{\|y_n - x\|^2}{2}}_{\downarrow\, d(x,C)} + \underbrace{\frac{\|y_m - x\|^2}{2}}_{\downarrow\, d(x,C)} - \|x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C \text{ (convexe)}}\|^2 \Big)$$

$$\leq 4 \underbrace{\Big(\frac{\|y_n - x\|^2}{2} + \frac{\|y_m - x\|^2}{2} - d(x,C) \Big)}_{\xrightarrow[n,m\infty]{} 0}$$

donc $(y_n)_n$ converge dans C vers y. Et $\|x-y\| = d(x,C)$.

<u>Unicité</u> : $\forall v \in C, \quad \|x-y\| \leq \|x-v\|$

$$\Rightarrow \forall\, 0 \leq t \leq 1 \quad \|x-y\|^2 \leq \|x - tv - (1-t)y\|^2$$

$$\Rightarrow \forall\, 0 \leq t \leq 1 \quad \|x-y\|^2 \leq \|x-y\|^2 + t^2\|v-y\|^2 - 2t\langle x-y, v-y\rangle$$

$$\Rightarrow \forall\, 0 \leq t \leq 1, \quad \underbrace{t^2\|v-y\|^2 - 2t\langle x-y, v-y\rangle}_{f(t)} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow f'(0) \geq 0 \Rightarrow -2\langle x-y, v-y\rangle \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \langle x-y, v-y\rangle \leq 0$$

Si : $\|x-y_1\| = d(x,C) = \|x-y_2\|$, alors :

$$\forall v \in C, \quad \langle x-y_1, v-y_1\rangle \leq 0 \quad \overset{v=y_2\in C}{\Longrightarrow} \quad \langle x-y_1, y_2-y_1\rangle \leq 0$$

$$\langle x-y_2, v-y_2\rangle \leq 0 \quad \underset{v=y_1\in C}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\langle x-y_2, y_1-y_2\rangle}_{=\langle y_2-x,\ y_2-y_1\rangle} \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle y_2-y_1, y_2-y_1\rangle \leq 0 \Rightarrow \boxed{y_2=y_1}$$

<u>Remarque</u> : $y = p_C(x)$ vérifie :

$$\forall v \in C, \quad \langle x-p_C(x), v-p_C(x)\rangle \leq 0$$

En particulier si $C = F \leq H$ sous-espace vectoriel fermé

$$\forall\, v_1 \in F, \quad \langle x-p_C(x), v_1\rangle = 0$$

d'où $\quad x - p_F(x) \in F^\perp$.

<u>Corollaire</u> 1) $\forall F \leq H$ sous-espace vectoriel fermé,

$$H = F \oplus F^\perp$$

2) $\forall F \leq H$ fermé, $\quad F^{\perp\perp} = F$

2') $\forall F \leq H, \quad F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

<u>Exercice</u> Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2\, dx$.

Solution : $H = L^2([0,2\pi])$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$$

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2 dx = \inf_{v\in Vect\{1,x\}} \|\sin x - v\|^2 = d(\sin x, F)^2$$

$$\text{où } F = Vect\{1,x\} \leq L^2([0,2\pi])$$

$$\text{donc } \inf = \|\sin x - \underbrace{p_F(\sin x)}_{=?}\|^2$$

On cherche $a,b\in\mathbb{R}$, $\sin x - a - bx \in F^\perp$

$$\iff \langle \sin x - a - bx, 1\rangle = \langle \sin x - a - bx, x\rangle = 0$$

On $\langle \sin x, 1\rangle = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$

$$\langle \sin x, x\rangle = \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \underset{i.p.p}{=} [-x\cos x]_0^{2\pi} = -2\pi$$

donc $\langle \sin x - a - bx, 1\rangle = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx - a\int_0^{2\pi} dx - b\int_0^{2\pi} x\,dx = -2\pi a - 2\pi^2 b$

et $\langle \sin x - a - bx, x\rangle = \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx - a\int_0^{2\pi} x\,dx - b\int_0^{2\pi} x^2 dx = -2\pi - 2\pi^2 a - \frac{8\pi^3}{3} b$

D'où : $\sin x - a - bx \in F^\perp \iff \begin{cases} -2\pi a - 2\pi^2 b = 0 \\ -2\pi^2 a - \frac{8\pi^2}{3} b = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} a + \pi b = 0 \\ \pi a + \frac{4\pi}{3} b = -1 \end{cases}$

(règle de Cramer)

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \pi \\ -1 & \frac{4\pi}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \pi \\ \pi & \frac{4\pi}{3} \end{vmatrix}} = \dfrac{\pi}{\frac{4\pi}{3} - \pi^2} = \dfrac{3}{4 - 3\pi} \\[2ex] b = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pi & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \pi \\ \pi & 4\pi/3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-1}{\frac{4\pi}{3} - \pi^2} = \dfrac{-3}{\pi(4-3\pi)} \end{cases}$$

~~On résout :~~ $\cancel{\begin{cases} \langle \sin x - a - bx, 1\rangle = 0 \\ \langle \sin x - a - bx, x\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\pi a - b\pi^2 = 0 \\ -2\pi - a(2\pi^2) - b \times \frac{8\pi^3}{3} = 0 \end{cases}}$

$$\cancel{d(\sin x, F)^2 = \pi - \frac{6}{\pi}} \quad \ldots$$

Suite jeudi prochain.

Donc : $d(\sin x, F)^2 = \|\sin x - p_F(\sin x)\|^2 = \|\sin x - a - bx\|^2 = \int_0^{2\pi} (\sin x - a - bx)^2 dx$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx + a^2\int_0^{2\pi} dx + b^2 \int_0^{2\pi} x^2 dx - 2a\int_0^{2\pi} \sin x\,dx - 2b\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx + 2ab\int_0^{2\pi} x\,dx$$

$$= \pi + 2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3} + 4\pi b + 4ab\pi^2$$

$$= \pi - 4a + \frac{2\pi a^2}{3} \quad (\text{car } \pi b = -a)$$

$$\boxed{= \frac{(3\pi-4)^2\pi + 14(3\pi-4) + 8}{(3\pi-4)^2}}$$