# Analyse fonctionnelle.

<u>Rappel</u>: si $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(X,\mu) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \}$

$$L^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim \qquad f \sim g \text{ si } f = g \ \mu\text{ p.p.}$$

Théorème : $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ est un evn complet.

où $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

<u>démo</u>. Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions dans $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m,n \geq N \quad \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$$

alors il existe $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ tq

$$\lim_{n\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

on pose $f(x) = \limsup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ $\square$.

## <u>Convolution</u>

Définition Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

si c'est défini, on pose $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$

<u>Exemple</u> si $f(x) = e^{-ax^2}$ $\quad a > 0$

$g(x) = e^{-bx^2}$ $\quad b > 0$

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-y)^2} e^{-by^2} dy$$

$$= e^{-ax^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)y^2 + 2axy} dy$$

or $-(a+b)y^2 + 2axy = -(a+b)\left(y - \frac{ax}{a+b}\right)^2 + \frac{a^2x^2}{a+b}$

donc $f*g(x) = e^{-ax^2 + \frac{a^2x^2}{a+b}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)\left(y-\frac{ax}{a+b}\right)^2} dy}_{t = y - \frac{ax}{a+b}}$

$$= e^{-ax^2 + \frac{a^2x^2}{a+b}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)t^2} dt \boxed{= \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \, e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}}$$

Théorème (inégalité de Young)

Soient $p, q, r \geqslant 1$ tq $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}}$

a) si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g(x)$ est p.p défini,

$x \longmapsto f*g(x)$ mesurable

b) $f*g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

c) si $r = \infty$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ alors $\forall x$, $f*g(x)$ définie

et $\forall x$ $|f*g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

<u>Démo</u>. si $f, g \geqslant 0$

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$h_x(y) := f(x-y)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{h_x^{p/r} g^{q/r}}_{f_1} \underbrace{h_x^{1-p/r}}_{f_2} \underbrace{g^{1-q/r}}_{f_3}$$

D'après l'inégalité de Hölder (généralisée)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 f_2 f_3 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}$$

où $p_1, p_2, p_3 \geqslant 1$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$

on choisit ici : $p_1 = r$, $p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$, $p_3 = \frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$

$$f*g(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x^p g^q\right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^q\right)^{1/q - \frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow (f*g(x))^r \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} h_x^p g^q \, \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)^r(x)\, dx \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x^p g^q\, dy\right) dx}_{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x^p\, dx\right) g^q\, dy}$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} h_x^p\, dx}_{\|f\|_p^p}$$

$$\leqslant \|f\|_p^r \|g\|_q^r$$

$$\Rightarrow \|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

Donc $f*g(x)$ fini p.p

si $f, g$ quelconques

$f = f^+ - f^-$ et $g = g^+ - g^-$

où $f^+ = \max\{f, 0\}$ , $f^- = \max\{-f, 0\}$

De plus on a p.p : $f*g(x) = g*f(x)$.

Pause 5'.